1 حرکت بر دایره

یک ذره بر یک دایره به شعاعِ R حرکت میکند. صفحه یِ $x-y$ را بر صفحه یِ دایره، و مبدئ را بر مرکزِ دایره میگذارم. یک راه برا یِ نمایشِ پارامتری یِ دایره این است.

$$x = R\,\cos\phi. \tag{1}$$

$$y = R\,\sin\phi. \tag{2}$$

ϕ زاویه یِ بردارِ مکانِ ذره با نیمه یِ مثبتِ محورِ x است. این زاویه تابعِ زمان است، و بستگی-به-زمانِ مکانِ ذره از بستگی یِ ϕ به زمان میئاید. بردارِ مکان میشود

$$\boldsymbol{r} = R\,(\hat{\boldsymbol{x}}\,\cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\,\sin\phi), \tag{3}$$

و در طرفِ راست، فقط ϕ به زمان وابسته است. بردارِ سرعت میشود

$$\boldsymbol{v} = R\,\dot{\phi}\,(-\hat{\boldsymbol{x}}\,\sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\,\cos\phi). \tag{4}$$

شتاب هم چنین میشود

$$\boldsymbol{a} = R\,\ddot{\phi}\,(-\hat{\boldsymbol{x}}\,\sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\,\cos\phi) - R\,\dot{\phi}^2\,(\hat{\boldsymbol{x}}\,\cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\,\sin\phi). \tag{5}$$

دُ بردارِ یکه یِ جدید معرفی میکنم و این روابط را بر حسبِ آنها مینویسم. $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ بردارِ یکه یِ شعاعی ست: بردار ی که در هر نقطه از دایره در جهتِ مرکزِ دایره به آن نقطه است و طول َش یک است:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}. \tag{6}$$

به این ترتیب،

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{x}}\,\cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\,\sin\phi. \tag{7}$$

$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ یک بردار ِ یکه است که بر $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ عمود است، و در نتیجه بر دایره مماس است. در هر نقطه از دایره دُ جهت برا یِ مماس بر دایره ممکن است: ساعتگرد و پادساعتگرد. $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ را در جهت ِ پادساعتگرد (متناظر با افزایش ِ ϕ) تعریف میکنم. به این ترتیب، جهت ِ $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ جهت ِ تغییر ِ مکان بر دایره است، وقت ی ϕ زیاد میشود. پس $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ یکه-شده یِ مشتق ِ مکان نسبت به ϕ است:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \left|\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,\phi}\right|^{-1}\ \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,\phi}. \tag{8}$$

دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,\phi} = R\,(-\hat{\boldsymbol{x}}\,\sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\,\cos\phi). \tag{9}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,\phi}\right| = R. \tag{10}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\,\sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\,\cos\phi. \tag{11}$$

از جمله معلوم میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\mathrm{d}\,\phi} = \hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\mathrm{d}\,\phi} = -\hat{\boldsymbol{\rho}}. \tag{13}$$

بر حسب ِ $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ (بردار ِ یکه یِ شعاعی) و $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (بردار ِ یکه یِ سمتی)،

$$\boldsymbol{r} = R\,\hat{\boldsymbol{\rho}}. \tag{14}$$

از این رابطه هم میشود سرعت را حساب کرد. اما باید توجه کرد که $\hat{\boldsymbol{\rho}}$، بر خلاف ِ $\hat{\boldsymbol{x}}$ و $\hat{\boldsymbol{y}}$، ثابت نیست. پس در مشتقگیری باید از آن هم مشتق گرفت. در واقع در طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا فقط $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ است که ثابت نیست. مشتق ِ $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ نسبت به زمان از قاعده یِ زینجیری یِ مشتقگیری به دست میئاید:

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\mathrm{d}\,\phi}\,\frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,t}. \tag{15}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{v} = R\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{16}$$

که هم ان رابطه یِ (4) است. شتاب هم چنین میشود.

$$\boldsymbol{a} = R\,\frac{\mathrm{d}\,\dot{\phi}}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + R\,\dot{\phi}\,\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\mathrm{d}\,\phi}\,\frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,t}, \tag{17}$$

یا

$$\boldsymbol{a} = R\,\ddot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} - R\,\dot{\phi}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}}, \tag{18}$$

که هم ان (5) است.

به $\dot{\phi}$ سرعت ِ زاویِئی میگویم و آن را با ω نشان میدهم. سرعت مماس بر مسیر (دایره است)، و اندازه اَ ش شعاع ضرب در اندازه یِ سرعت- ِ-زاویِئی ست:

$$|\boldsymbol{v}| = R\,|\omega|. \tag{19}$$

شتاب یک مئلفه یِ مماس بر مسیر دارد که موازی با سرعت است و وقت ی ناصفر است که اندازه یِ سرعت تغییر کند؛ و یک مئلفه یِ عمود بر مسیر (مرکزگرا، به سو یِ مرکز ِ دایره)، که ناشی از تغییر ِ جهت ِ سرعت است (حتا اگر اندازه یِ سرعت ثابت باشد):

$$\boldsymbol{a} = a_\tau\,\hat{\boldsymbol{v}} - a_n\,\hat{\boldsymbol{\rho}}, \tag{20}$$

که $\hat{\boldsymbol{v}}$ بردار ِ یکه در جهت ِ سرعت است:

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\omega}{|\omega|}, \tag{21}$$

و

$$a_\tau = R\,\frac{\mathrm{d}\,|\omega|}{\mathrm{d}\,t}. \tag{22}$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}\,|\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}\,t}. \tag{23}$$

$$a_n = R\,\omega^2. \tag{24}$$

$$a_n = \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{R}. \tag{25}$$

دیده میشود حتا اگر اندازه یِ سرعت ثابت باشد (حرکت ِ دایرِئی یِ یکنواخت) شتاب صفر نیست: همچنان مئلفه یِ مرکزگرا یِ شتاب باقی میمانَد.