1 پرتابه، یک نمونه از حرکتِ با شتابِ ثابت

جسم ی در نزدیکی یِ سطحِ زمین حرکت میکند و جز گرانشِ زمین، چیزها یِ دیگر اثرِ مهم ی بر آن ندارند. ناحیه ای که جسم در آن حرکت میکند (نسبت به زمین) کوچک است. به این ترتیب سطحِ زمین تقریبَن تخت است و شتابِ این جسم ثابت است. این شتابِ ثابت را با $\boldsymbol{g}$ نشان میدهم. محورِ y را عمودی و رو-به-بالا، و مبدئ را بر سطحِ زمین میگیرم. صفحه یِ $x-y$ را هم صفحه یِ شاملِ $\boldsymbol{g}$ و سرعتِ اولیه میگیرم. به این ترتیب حرکت در صفحه یِ $x-y$ انجام میشود. شتاب و سرعت، بر حسبِ بردارها یِ پایه چنین میشوند.

$$\boldsymbol{a} = -g\,\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{1}$$

$$\boldsymbol{v} = v_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\,\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{2}$$

سرعت و مکان بر حسبِ زمان میشوند

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{g}\,t. \tag{3}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0\,t - \frac{\boldsymbol{g}\,t^2}{2}. \tag{4}$$

شاخصِ 0 متناظر با زمان زمانِ صفر است. مئلفِها یِ سرعت و مکان هم میشوند

$$v_x = v_{x\,0}. \tag{5}$$

$$v_y = v_{y\,0} - g\,t. \tag{6}$$

$$x = x_0 + v_{x\,0}\,t. \tag{7}$$

$$y = y_0 + v_{y\,0}\,t - \frac{g\,t^2}{2}. \tag{8}$$

چنان که انتظار میرفت، حرکت دُ مئلفه یِ افقی و عمودی دارد که مستقل از هم َند. مئلفه یِ افقی با سرعتِ ثابت است، و مئلفه یِ عمودی با شتابِ ثابتِ ناصفر. مئلفِها یِ افقی و عمودی یِ سرعتِ اولیه را میشود بر حسبِ اندازه یِ سرعتِ اولیه و θ (زاویه یِ سرعتِ اولیه با افق) نوشت. بر حسبِ

اینها،

$$v_{x\,0} = v_0\,\cos\theta. \tag{9}$$

$$v_{y\,0} = v_0\,\sin\theta. \tag{10}$$

$$v_x = v_0\,\cos\theta. \tag{11}$$

$$v_y = v_0\,\sin\theta - g\,t. \tag{12}$$

$$x = x_0 + (v_0\,\cos\theta)\,t. \tag{13}$$

$$y = y_0 + (v_0\,\sin\theta)\,t - \frac{g\,t^2}{2}. \tag{14}$$

دُ نقطه یِ خاص ِ مسیر، نقطه یِ اُج و نقطه یِ بازگشت به زمین َند. اولی را با 1 و دومی را با 2 نشان میدهم. در اولی y بیشینه است. پس مشتق ِ آن صفر است:

$$0 = v_0\,\sin\theta - g\,t_1. \tag{15}$$

به این ترتیب،

$$t_1 = \frac{v_0\,\sin\theta}{g}. \tag{16}$$

$$x_1 = x_0 + \frac{v_0^2\,\sin(2\,\theta)}{2\,g}. \tag{17}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{v_0^2\,\sin^2\theta}{2\,g}. \tag{18}$$

رُشن است که $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ جا-به-جایی نسبت به نقطه یِ شروع است. از جمله،

$$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 = \hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{v_0^2\,\sin(2\,\theta)}{2\,g} + \hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{v_0^2\,\sin^2\theta}{2\,g}. \tag{19}$$

نقطه یِ بازگشت جا یی ست که y صفر میشود:

$$0 = y_0 + (v_0\,\sin\theta)\,t_2 - \frac{g\,t_2^2}{2}. \tag{20}$$

با فرض ِ این که حرکت از زیر ِ زمین شروع نشده، y_0 نامنفی ست. در این صورت این معادله یِ درجه-یِ-دُ یک ریشه یِ نامنفی و یک ریشه یِ نامثبت دارد. جواب ِ مُرید- ِ-نظر ریشه یِ نامنفی ست:

$$t_2 = \frac{v_0\,\sin\theta + \sqrt{v_0^2\,\sin^2\theta + 2\,g\,y_0}}{g}. \tag{21}$$

$$x_2 = (v_0\,\cos\theta)\,\frac{v_0\,\sin\theta + \sqrt{v_0^2\,\sin^2\theta + 2\,g\,y_0}}{g}. \tag{22}$$

تانژانت ِ زاویه یِ بردار ِ سرعت با سطح ِ زمین نسبت ِ v_y به v_x است. این زاویه در نقطه یِ بازگشت به زمین را با ϕ نشان میدهم:

$$\tan\phi = -\frac{\sqrt{v_0^2\,\sin^2\theta + 2\,g\,y_0}}{v_0\,\cos\theta}. \tag{23}$$

یک حالت ِ خاص این است که نقطه یِ شروع بر سطح ِ زمین باشد. برا یِ سادگی مبدئ را بر این نقطه میگذارم. دیده میشود

$$\boldsymbol{r}_0 = 0. \tag{24}$$

$$t_2 = 2\,t_1. \tag{25}$$

$$x_2 = 2\,x_1. \tag{26}$$

$$\phi = -\theta. \tag{27}$$

x_2 برد ِ پرتابه است. با

$$x_2 = \frac{v_0^2\,\sin(2\,\theta)}{g}, \tag{28}$$

دیده میشود با v_0 ِ معین برد وقت ی بیشینه میشود که $\sin(2\,\theta)$ یک شود، یعنی

$$\theta = \frac{\pi}{4}. \tag{29}$$

چه بر سر ِ نقطه یِ بازگشت میئاید، اگر نقطه یِ شروع زیر ِ زمین باشد؟

حرکت ِ پرتابه نسبت به یک سطح ِ شیبدار را بررسی میکنم، وقت ی نقطه یِ شروع بر این سطح است. 1 و 2، به ترتیب، متناظر با بیشینه یِ ارتفاع نسبت به این سطح و بازگشت به آن َند. اشتراک ِ

این سطح با صفحه یِ حرکت ِ پرتابه یک خط است. زاویه یِ این خط با سطح نسبت به زمین را با α نشان میدهم. معادله یِ این خط میشود

$$y = x\,\tan\alpha. \tag{30}$$

ارتفاع نسبت به این خط $\tilde{y}$ است، که

$$\tilde{y}(t) = y(t) - x\,(t)\,\tan\alpha. \tag{31}$$

ارتفاع ِ بیشینه جا یی رخ میدهد که مشتق ِ $\tilde{y}$ نسبت به زمان صفر شود:

$$0 = v_0\,\sin\theta - g\,t_1 - v_0\,(\cos\theta)\,\tan\alpha. \tag{32}$$

$$t_1 = \frac{v_0\,\sin(\theta-\alpha)}{g\,\cos\alpha}. \tag{33}$$

$$x_1 = \frac{v_0^2\,(\cos\theta)\,\sin(\theta-\alpha)}{g\,\cos\alpha}. \tag{34}$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{v_0^2\,\sin^2(\theta-\alpha)}{2\,g\,\cos^2\alpha}. \tag{35}$$

بازگشت هم جا یی ست که $\tilde{y}$ صفر میشود:

$$0 = v_0\,(\sin\theta)\,t_2 - \frac{g\,t_2^2}{2} - v_0\,(\cos\theta)\,(\tan\alpha)\,t_2. \tag{36}$$

$$t_2 = 2\,t_1. \tag{37}$$

$$x_2 = 2\,x_1. \tag{38}$$