1 نوسانگرِ هاهنگ، با میرایی و نیرو یِ وادارنده

حالتِ تعادلِ یک سیستم نقطه ای ست که سیستم اگر با سرعتِ صفر در آن نقطه باشد، آنجا میمانَد. یعنی نیرو یِ متناظر با آن نقطه و سرعتِ صفر، صفر است. وقت ی نیرو پایستار است، این یعنی مشتقِ انرژی یِ پتانسیل در آن نقطه صفر است. نقطه یِ تعادل را با r_0 نشان میدهم. اگر انرژی (E) برابر با $U(r_0)$ باشد، که U انرژی یِ پتانسیل است، سیستم در r_0 میمانَد. اگر انرژی کم ی بیش از $U(r_0)$ باشد، سیستم در r_0 نمیمانَد، اما اگر U در r_0 کمینه باشد و در یک همسایگی از r_0 بزرگتر از $U(r_0)$ باشد، میشود E را چنان گرفت که از $U(r_0)$ بزرگتر باشد ولی اختلاف َش با $U(r_0)$ چنان کوچک باشد که اگر $|r-r_0|$ از مقدار ی بزرگتر شود $U(r)$ از E بزرگتر شود، و این مقدار به E بستگی دارد: وقت ی E از بالا به $U(r_0)$ نزدیک میشود، این مقدار به صفر میگراید. سیستم فقط جاها یی میتواند باشد که انرژی ناکوچکتر از انرژی یِ پتانسیل است. نتیجه این که با شرایطِ بالا، اگر E اندک ی بیش از $U(r_0)$ باشد و سیستم ابتدا نزدیکِ r_0 باشد، سیستم نزدیکِ r_0 میمانَد. یا اگر سیستم ابتدا نزدیکِ r_0 باشد و سرعت َش هم کم باشد، هم ان نزدیکی میمانَد. در این صورت میگویند نقطه-یِ-تعادلِ r_0 پایدار است.

به این ترتیب، نقطه-یِ-تعادلها یِ پایدارِ متناظر با نیروها یِ پایستار، جاها یی یَند که انرژی یِ پتانسیل کمینه میشود. در بسطِ تِیلِرِ انرژی-یِ-پتانسیل اطرافِ یک نقطه-یِ-تعادلِ پایدارِ r_0خُدِ $U(r_0)$ مهم نیست، چون یک ثابتِ جمعی ست و ثابتِ جمعی در انرژی-یِ-پتانسیل بر نیرو اثر ی ندارد. جمله یِ خطی هم صفر است، چون مشتقِ U در r_0 صفر است. پس اگر اختلافِ r با r_0 کوچک باشد، میشود U را با یک عبارتِ درجه-یِ-دُ تقریب کرد. البته چون U در r_0 کمینه است، مشتقِ دومِ U در r_0، در همه یِ راستاها نامنفی ست. این حالتِ خاص را که مشتقِ دومِ U در r_0، در بعض ی راستاها صفر شود کنار میگذارم. در این صورت مشتقِ دومِ U در r_0، در همه یِ راستاها مثبت است. به این تقریب از انرژی-یِ-پتانسیل (یک تابعِ درجه-یِ-دُ که مشتقِ دوم َش در همه یِ جهتها مثبت است) انرژی-یِ-پتانسیلِ نوسانگرِ هماهنگ میگویم.

مبدئ را بر نقطه یِ تعادلِ پایدار میگذارم، که یعنی r_0 را صفر میکنم. در یک بُعد، انرژی-یِ-

پتانسیل ِ نوسانگر ِ هماهنگ میشود

$$U = \frac{k\,x^2}{2}, \tag{1}$$

که k مشتق ِ دوم ِ U است، و مثبت است. (در یک بُعد، فقط یک راستا هست.) به این ترتیب، معادله یِ حرکت میشود

$$m\,\ddot{x} = -k\,x. \tag{2}$$

نیرو در جهت ی ست که سیستم را به نقطه یِ تعادل بازگردانَد، و در این تقریب متناسب با جا-به-جایی از تعادل است. میگویند نیرو یِ بازگرداننده، نسبت به جا-به-جایی خطی ست. این هم ان قانون- ِ-نیرو یِ هوک است.

یک مدل ِ نزدیکتر-به-واقعیت این است که علاوه بر نیرو یِ بازگرداننده یِ تابع- ِ-مکان، یک نیرو یِ اتلافی یِ تابع ِ سرعت هم به جسم وارد میشود: نوسانگرها به تدریج دامنه یِ شان کم میشود. یک شکل ِ ساده برا یِ این نیرو یِ اتلافی آن است که این نیرو متناسب با سرعت و در خلاف ِ جهت ِ آن است. در این صورت معادله یِ حرکت میشود

$$m\,\ddot{x} = -k\,x - \alpha\,\dot{x}, \tag{3}$$

که α یک ثابت ِ مثبت است. برا یِ کوچک-کردن ِ شکل ِ معادلات و جوابها، ثابتها یِ ω_0 و γ را به جا یِ k و α به کار میبَرم:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{4}$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\,m}. \tag{5}$$

معادله یِ حرکت میشود

$$0 = \ddot{x} + 2\,\gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\,x. \tag{6}$$

این یک معادله یِ دیفرانسیل ِ خطی با ضریبها یِ ثابت است. یک راه ِ رایج برا یِ حل ِ چنین-معادلات ی این است که جوابها یی به شکل ِ

$$x(t) = \exp(s\,t) \tag{7}$$

را در معادله امتحان کنیم، که s ثابت است. یک انگیزه برا یِ انتخاب ِ این جوابها یِ خاص این است که اگر x به شکل ِ (7) باشد، هر یک از مشتقها یِ x هم مضرب ی ثابت از x است. در این صورت طرف ِ راست ِ معادله یِ (6) به شکل ِ $A\,x$ در میئاید، که A مستقل از t و تابع ِ s است. شرط ِ برقراری یِ معادله یِ (6) این میشود که A صفر باشد. حدس ِ (7) را در معادله یِ 6 میگذارم. نتیجه میشود

$$0 = (s^2 + 2\,\gamma\,s + \omega_0^2)\ \exp(s\,t), \tag{8}$$

و از آنجا،

$$0 = s^2 + 2\,\gamma\,s + \omega_0^2. \tag{9}$$

جوابها یِ این معادله برا یِ s میشوند s_1 و s_2، که

$$s_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{10}$$

$$s_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{11}$$

پس معادله یِ (6) دُ جواب به شکل ِ (7) دارد، مگر در حالت ِ خاص ی که s_1 و s_2 با هم برابر باشند. به این حالت بعدَن میرسم. معادله یِ (6) خطی ست، به این معنی که اگر x_1 و x_2 جوابها یی از این معادله باشند و c_1 و c_2 ثابت باشند، $(c_1\,x_1 + c_2\,x_2)$ هم جواب ی از این معادله است. پس x به شکل ِ

$$x(t) = c_1\ \exp(s_1\,t) + c_2\ \exp(s_2\,t) \tag{12}$$

هم جواب ِ معادله یِ (6) هست. در واقع ثابت میشود این کلیترین جواب ِ (6) است.

اگر زیر ِ رادیکال در (10) و (11) مثبت باشد، s_1 و s_2 حقیقی یَند و هر-دُ منفی یَند. شرط ِ این که این حالت رخ دهد آن است که

$$\gamma > \omega_0, \tag{13}$$

یعنی اتلاف از حد ی بیشتر باشد. به این، حالت ِ فُق- ِ-میرا میگویند. دیده میشود در این حالت نماییها یِ طرف ِ راست ِ (12)با افزایش ِ زمان به صفر میروند. این نتیجه ای ست که از پیش هم

قابل- ِ-انتظار بود. اصطکاک (اتلاف) باعث میشود نوسانگر به تدریج بئیستد. البته برا یِ این حالت (که s_1 و s_2 حقیقی یَند) واقعَن نوسان ی رخ نمیدهد. میتوانید ببینید که جواب ی به شکل ِ (12) با s_1 و s_2 یِ حقیقی، دست- ِ-بالا در یک زمان مشتق َ ش صفر میشود.

یک حالت ِ دیگر آن است که زیر ِ رادیکال در (10) و (11) منفی باشد:

$$\gamma < \omega_0. \tag{14}$$

به این، حالت ِ زیر- ِ-میرا میگویند. در این حالت ω را چنین تعریف میکنم.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{15}$$

و (10) و (11) را چنین مینویسم.

$$s_1 = -\gamma - \mathrm{i}\,\omega \tag{16}$$

$$s_2 = -\gamma + \mathrm{i}\,\omega. \tag{17}$$

با استفاده از

$$\exp(\mathrm{i}\,\omega\,t) = \cos(\omega\,t) + \mathrm{i}\,\sin(\omega\,t), \tag{18}$$

دیده میشود

$$\exp(s_1\,t) = \exp(-\gamma\,t)\,[\cos(\omega\,t) - \mathrm{i}\,\sin(\omega\,t). \tag{19}$$

$$\exp(s_2\,t) = \exp(-\gamma\,t)\,[\cos(\omega\,t) + \mathrm{i}\,\sin(\omega\,t). \tag{20}$$

پس (12) را میشود چنین نوشت

$$x(t) = \exp(-\gamma\,t)\,[a_1\,\cos(\omega\,t) + a_2\,\sin(\omega\,t)], \tag{21}$$

که a_1 و a_2 ثابت َند. در این حالت، جواب ِ معادله یِ (6) یک سینوسی یِ میرا ست. x با رمان نوسان میکند، اما با گذشت ِ زمان دامنه اَ ش کم میشود.

حالت ی که میمانَد این است که s_1 و s_2 برابر باشند. این متناظر است با

$$\gamma = \omega_0. \tag{22}$$

به این، حالت ِ بحرانی-میرا (یا میرا یِ بحرانی) میگویند. متغیر ِ ξ را چنین تعریف میکنم.

$$x(t) = y(t)\, \exp(-\gamma\, t). \tag{23}$$

این را در (6) میگذارم. با استفاده از (22)، معادله برا یِ y میشود

$$0 = \ddot{y}, \tag{24}$$

که جواب َ ش میشود

$$y(t) = b_0 + b_1\, t, \tag{25}$$

که b_0 و b_1 ثابت َند. پس x چنین میشود

$$x(t) = (b_0 + b_1\, t)\, \exp(-\gamma\, t). \tag{26}$$

در زمانها یِ بزرگ، پرانتز ِ اول ِ طرف ِ راست بزرگ میشود و نمایی به صفر میگراید، اما حاصل-ِ-ضرب ِ این-دُ به صفر میگراید. پس اینجا هم در زمانها یِ بزرگ، x به صفر میرود.

یک نتیجه این است که اتلاف، چه بزرگ باشد و چه کوچک (فقط ناصفر) باعث میشود نوسانگر به تدریج متوقف شود، چنان که انتظار میرفت. یک حد ِ معین هست که اگر اتلاف از آن حد کمتر باشد (حالت ِ زیر-ِ-میرا)، حرکت نوسانی یِ میرا ست، و اگر اتلاف از آن حد بیشتر باشد (حالت ِ فُق-ِ-میرا)، نوسان از بین میرود.

اگر علاوه نیرو-یِ-بازدارنده یِ متناسب با مکان، و اصطکاک ِ متناسب با سرعت، یک نیرو یِ خارجی یِ F هم به نوسانگر وارد شود، معادله یِ حرکت میشود

$$m\, \ddot{x} = -k\, x - \alpha\, \dot{x} + F. \tag{27}$$

حالت ی را بررسی میکنم که F نوسانی با بسامد- ِ-زاویِئی یِ Ω ست. f را دامنه یِ F تقسیم بر m تعریف میکنم. معادله یِ حرکت میشود

$$\ddot{x} + 2\,\gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = f\,\cos(\Omega\,t). \tag{28}$$

F تابع ِ زمان است، اما f ثابت است. یک جواب ِ خاص ِ این معادله این است که x نوسانی با بسامد- ِ-زاویِئی یِ Ω است:

$$x(t) = q_1\,\cos(\Omega\,t) + q_2\,\sin(\Omega\,t), \tag{29}$$

که q_1 و q_2 ثابت َند. این را در (28) میگذارم:

$$\begin{aligned} f\,\cos(\Omega\,t) &= [(\omega_0^2 - \Omega^2)\,q_1 + (2\,\gamma\,\Omega)\,q_2]\,\cos(\Omega\,t) \\ &\quad + [(\omega_0^2 - \Omega^2)\,q_2 - (2\,\gamma\,\Omega)\,q_1]\,\sin(\Omega\,t). \end{aligned} \tag{30}$$

از اینها نتیجه میشود

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)\,q_1 + (2\,\gamma\,\Omega)\,q_2 = f. \tag{31}$$

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)\,q_2 - (2\,\gamma\,\Omega)\,q_1 = 0. \tag{32}$$

پس،

$$q_1 = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\gamma^2\,\Omega^2}\,f. \tag{33}$$

$$q_2 = \frac{2\,\gamma\,\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\gamma^2\,\Omega^2}\,f. \tag{34}$$

رابطه یِ (29) را میشود چنین نوشت.

$$x(t) = q\,\cos(\Omega\,t - \phi), \tag{35}$$

که (q, ϕ) مختصات ِ قطبی یِ متناظر با (q_1, q_2) اند:

$$q_1 = q\,\cos\phi. \tag{36}$$

$$q_2 = q\,\sin\phi. \tag{37}$$

یا،

$$q = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\gamma^2\,\Omega^2}}. \tag{38}$$

$$\phi = \cot^{-1} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\,\gamma\,\Omega}. \tag{39}$$

q دامنه یِ x است، و ϕ تئخیر- ـِفاز ِ x نسبت به F است. اگر γ کوچک باشد (اتلاف کم باشد)، q با افزایش ِ Ω زیاد میشود، بیشینه میشود، و سپس کم میشود. Ω یی که به ازا یِ آن q بیشینه میشود را با Ω_0 نشان میدهم:

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\,\gamma^2}. \tag{40}$$

دیده میشود اگر γ خیل ی کوچک باشد، Ω_0 خیل ی نزدیک ِ ω_0 است. هر چه γ کوچکتر باشد، بیشینه یِ q هم بزرگتر است. در حالت ِ حدی یِ γ به صفر، Ω_0 به ω_0 میگراید و بیشینه یِ q هم بینهایت میشود. ω_0 نزدیک ِ بسامد- ـِزاویئی یِ طبیعی یِ سیستم است: بسامد- ـِزاویئی یِ نوسان ِ سیستم وقت ی نیرو یِ خارجی یی نیست. نتیجه این که وقت ی بسامد- ـِزاویئی یِ نیرو یِ خارجی نزدیک ِ بسامد- ـِزاویئی یِ طبیع یِ سیستم باشد، دامنه یِ نوسان ِ واداشته (نوسان ِ حاصل از نیرو یِ خارجی) بزرگ میشود. به این تشدید میگویند.

رابطه یِ (39) هم نشان میدهد تئخیر- ـِفاز با افزایش ِ Ω زیاد میشود، و از صفر در $(\Omega = 0)$ به π در $(\Omega \to \infty)$ میرود.