1 برخُرد ِ دُ جسم در بیش از یک بُعد

در حالت ِ کلی، حتا اگر دُ جسم پیش از برخُرد در یک راستا حرکت کنند، حرکت ِ شان پس از برخُرد لزومَن در هم ان راستا یِ اولیه نیست. پایستگی یِ تکانه میشود

$$m_1\,\boldsymbol{v}_{1\,\mathrm{f}} + m_1\,\boldsymbol{v}_{2\,\mathrm{f}} = m_1\,\boldsymbol{v}_{1\,\mathrm{i}} + m_1\,\boldsymbol{v}_{2\,\mathrm{i}}. \tag{1}$$

این یک معادله یِ برداری برا یِ دُ متغیر (سرعتها یِ پس-از-برخُرد) است. یک معادله یِ اسکالر هم از رابطه یِ انرژی-یِ-جنبشی یِ پس-از-برخرد با انرژی-یِ-جنبشی یِ پیش-از-برخرد میئاید:

$$Q = \left(\frac{m_1\,v_{1\,\mathrm{f}}^2}{2} + \frac{m_2\,v_{2\,\mathrm{f}}^2}{2}\right) - \left(\frac{m_1\,v_{1\,\mathrm{i}}^2}{2} + \frac{m_2\,v_{2\,\mathrm{i}}^2}{2}\right). \tag{2}$$

اندازه یِ بردار ِ $\boldsymbol{u}$ را با u نشان داده ام. توجه کنید که در مسئله یِ یک-بُعدی تصویر ِ بردار ِ $\boldsymbol{u}$ را با u نشان میدادم، و u ممکن بود منفی شود. اینجا u اندازه یِ $\boldsymbol{u}$ است و منفی نمیشود.

این معادلات، به-تنهایی برا یِ به-دست-آوردن ِ مجهولها کافی نیستند. در فضا یِ n بُعدی، اینها $(n+1)$ معادله یِ اسکالر َند. اما تعداد ِ مجهولها یِ اسکالر $(2\,n)$ است. $(n-1)$ معادله کم داریم. اگر جهت ِ یک یِ از سرعتها پس از برخُرد معلوم باشد، تعداد ِ مجهولها یِ باقیمانده $(n+1)$ میشود، یک مجهول برا یِ اندازه یِ آن سرعت، و n مجهول برا یِ مثلثها یِ سرعت ِ دیگر. در این حالت تعداد ِ معادلات برا یِ به-دست-آوردن ِ سرعتها یِ پس-از-برخُرد کافی ست.

اینجا هم حل ِ معادلات در چارچوب ِ مرکز-ِ-جرم سادتر است. کمیتها یِ متناظر با چارچوب ِ مرکز-ِ-جرم را با پریم نشان میدهم. از جمله برا یِ هر سرعت ِ $\boldsymbol{v}$،

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_{\mathrm{cm}}, \tag{3}$$

که

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\,\boldsymbol{v}_{1\,\mathrm{i}} + m_2\,\boldsymbol{v}_{2\,\mathrm{i}}}{m_1 + m_2}. \tag{4}$$

البته برخُرد سرعت ِ مرکز-ِ-جرم را عوض نمیکند. پس ضمنَن،

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\,\boldsymbol{v}_{1\,\mathrm{f}} + m_1\,\boldsymbol{v}_{2\,\mathrm{f}}}{m_1 + m_2}. \tag{5}$$

معادلات در چارچوبِ مرکز-ِ-جرم میشوند

$$0 = m_1\,\boldsymbol{v}'_{1\,\mathrm{f}} + m_1\,\boldsymbol{v}'_{2\,\mathrm{f}}. \tag{6}$$

$$Q = \left(\frac{m_1\,v'^2_{1\mathrm{f}}}{2} + \frac{m_2\,v'^2_{2\mathrm{f}}}{2}\right) - \left(\frac{m_1\,v'^2_{1\mathrm{i}}}{2} + \frac{m_2\,v'^2_{2\mathrm{i}}}{2}\right). \tag{7}$$

البته رُشن است که ضمنَن

$$0 = m_1\,\boldsymbol{v}'_{1\,\mathrm{i}} + m_1\,\boldsymbol{v}'_{2\,\mathrm{i}}. \tag{8}$$

$v'_{2\,\mathrm{f}}$ را از معادله یِ (6) به دست میئاورم و در معادله یِ (7) میگذارم:

$$Q = \left(\frac{m_1\,v'^2_{1\mathrm{f}}}{2} + \frac{m_1^2\,v'^2_{1\mathrm{f}}}{2\,m_2}\right) - \left(\frac{m_1\,v'^2_{1\mathrm{i}}}{2} + \frac{m_2\,v'^2_{2\mathrm{i}}}{2}\right). \tag{9}$$

به این ترتیب،

$$v'_{1\,\mathrm{f}} = \frac{1}{m_1}\sqrt{m_1^2\,v'^2_{1\mathrm{i}} + 2\,\frac{m_1\,m_2\,Q}{m_1+m_2}}, \tag{10}$$

و البته

$$v'_{2\,\mathrm{f}} = \frac{m_1}{m_2}\,v'_{1\,\mathrm{f}}. \tag{11}$$

شرطِ وجودِ جواب این است که زیرِ رادیکال منفی نشود:

$$0 \le \frac{m_1\,(m_1+m_2)\,v'^2_{1\mathrm{i}}}{2\,m_2} + Q, \tag{12}$$

که با استفاده از (8) میشود

$$0 \le \left(\frac{m_1\,v'^2_{1\mathrm{i}}}{2} + \frac{m_2\,v'^2_{2\mathrm{i}}}{2}\right) + Q, \tag{13}$$

یا

$$0 \le K'_{\mathrm{i}} + Q, \tag{14}$$

که یعنی

$$0 \leq K'_{\rm f}. \qquad (15)$$

تساوی در (15) متناظر با برخُرد ِ کاملَن-ناکشسان است. در این حالت دُ-جسم طی ِ برخُرد به هم میچسبند، که یعنی سرعت ِ هر جسم در چارچوب ِ مرکز- ِ-جرم صفر میشود.

اینها خیل ی شبیه ِ برخُرد در یک-بُعد َند. در چارچوب ِ مرکز- ِ-جرم، راستا یِ حرکت ِ ذرات به اندازه یِ یک زاویه (θ') میچرخد. اما نسبت ِ سرعتها تغییر نمیکند. اندازه یِ هر سرعت پس از برخُرد هم ، چنان که (10) دیده میشود، به θ' بستگی ندارد و با فقط انرژی-یِ-جنبشی یِ پیش-از-برخُرد، و Q به دست میئاید.

برخُرد ِ کشسان متناظر با $(Q=0)$ است. در این حالت،

$$v'_{1\,\rm f} = v'_{1\,\rm i}. \qquad (16)$$

این یعنی در برخُرد ِ کشسان، در چارچوب ِ مرکز- ِ-جرم اندازه یِ هر سرعت ثابت میماند. فقط راستا یِ مشترک ِ حرکت ِ ذرات میچرخد.

برا یِ برخُرد ِ کاملَن-ناکشسان هم که در چارچوب ِ مرکز- ِ-جرم، سرعت ِ هر یک از دُ-جسم پس از برخُرد صفر است.

یک چارچوب ِ خاص ِ دیگر چارچوب ی ست که در آن سرعت ِ یک جسم (مثلَن جسم ِ 2) پیش از برخُرد صفر است. کمیتها یِ متناظر با این چارچوب را بدون ِ پریم نشان میدهم. دیده میشود

$$\boldsymbol{v}_{\rm cm} = \frac{m_1\,\boldsymbol{v}_{1\,\rm i}}{m_1+m_2}. \qquad (17)$$

محور ِ x را بر جهت ِ حرکت ِ جسم ِ 1 پیش از برخُرد میگذارم. صفحه یِ $(x-y)$ را هم صفحه یِ شامل ِ سرعتها یِ جسم ِ 1 پیش از برخُرد و پس از برخُرد میگیرم، چنان که مئلفه یِ $\boldsymbol{v}'_{1\,\mathrm{f}}$ در جهت ِ y نامنفی باشد. اینها از کلیت ِ مسئله نمیکاهد، فقط قرارداد ِ انتخاب ِ محورها ست. به این ترتیب،

$$v'_{1\,\mathrm{f}\,x}=v'_{1\,\mathrm{f}}\,\cos\theta'. \tag{18}$$

$$v'_{1\,\mathrm{f}\,y}=v'_{1\,\mathrm{f}}\,\sin\theta'. \tag{19}$$

$$v_{\mathrm{cm}\,x}=\frac{m_1\,v_{1\,\mathrm{i}}}{m_1+m_2}. \tag{20}$$

$$v_{\mathrm{cm}\,y}=0. \tag{21}$$

$$\begin{aligned} v'_{1\,\mathrm{i}\,x}&=v_{1\,\mathrm{i}\,x}-v_{\mathrm{cm}\,x},\\ &=\frac{m_2\,v_{1\,\mathrm{i}}}{m_1+m_2}. \end{aligned} \tag{22}$$

$$v'_{1\,\mathrm{i}\,y}=0. \tag{23}$$

$$v'_{1\,\mathrm{i}}=\frac{m_2\,v_{1\,\mathrm{i}}}{m_1+m_2}. \tag{24}$$

پس،

$$v_{1\,\mathrm{f}\,x}=v'_{1\,\mathrm{f}}\,\cos\theta'+\frac{m_1\,v_{1\,\mathrm{i}}}{m_1+m_2}. \tag{25}$$

$$v_{1\,\mathrm{f}\,y}=v'_{1\,\mathrm{f}}\,\sin\theta'. \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \tan\theta&=\frac{v_{1\,\mathrm{f}\,y}}{v_{1\,\mathrm{f}\,x}},\\ &=\frac{v'_{1\,\mathrm{f}}\,\sin\theta'}{v'_{1\,\mathrm{f}}\,\cos\theta'+\dfrac{m_1\,v_{1\,\mathrm{i}}}{m_1+m_2}}. \end{aligned} \tag{27}$$

برا یِ برخُرد ِ کشسان Q صفر است:

$$v'_{1\,\mathrm{f}}=\frac{m_2\,v_{1\,\mathrm{i}}}{m_1+m_2}. \tag{28}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta'}{\cos\theta'+\dfrac{m_1}{m_2}}. \tag{29}$$

اگر m_1 کوچکتر از m_2 باشد، یک θ' هست که در آن مخرج ِ (29) میشود. به ازا یِ این θ'، مقدار ِ θ برابر با $(\pi/2)$ میشود. θ نسبت به θ' صعودی ست و وقت ی θ' از 0 تا π تغییر کند، θ هم از 0 تا

π تغییر میکند. البته θ همیشه از θ' کوچکتر است، مگر θ' برابر با 0 یا π باشد. از جمله معلوم میشود ممکن است جسمِ 1 پس از برخُرد با جسمِ 2 برگردد (θ برابر با π شود).

اما اگر m_1 بزرگتر از m_2 باشد مخرجِ (29) همیشه مثبت است. در این حالت θ کوچکتر از $(\pi/2)$ میمانَد. بیشنه یِ θ متناظر است با این که مشتقِ θ نسبت به θ' صفر شود:

$$(1+\tan^2\,\theta)\,\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,\theta'}=\frac{1+\dfrac{m_1}{m_2}\,\cos\theta'}{\left(\cos\theta'+\dfrac{m_1}{m_2}\right)^2}. \qquad (30)$$

طرفِ راست در $(\theta'=\theta'_0)$ صفر میشود، که

$$\theta'_0=\cos^{-1}\left(-\frac{m_2}{m_1}\right). \qquad (31)$$

این θ'_0 متناظر با θ_0 است، که بیشینه یِ θ است:

$$\begin{aligned}\tan\theta_0&=\frac{\sin\theta'_0}{\cos\theta'_0+\dfrac{m_1}{m_2}},\\ &=\frac{\dfrac{m_1}{m_2}}{\sqrt{1-\dfrac{m_2^2}{m_1^2}}}. \qquad (32)\end{aligned}$$

پس،

$$\theta_0=\sin^{-1}\frac{m_2}{m_1}. \qquad (33)$$

در این حالت جسمِ اول پس از برخُرد برنمیگردد، دست-ِ-بالا به اندازه یِ θ_0 از جهتِ اولیه یِ حرکت َش منحرف میشود.