1 رابطه یِ مکان و سرعت و شتاب

مکان و سرعت و شتاب تابعها یی از زمان َند. میشود بین ِ اینها زمان را حذف کرد و رابطه ای بین ِ این-سه یافت:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1}$$

پس،

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\,t = \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}. \tag{2}$$

همچنین،

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{3}$$

پس،

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}\,t}, \tag{4}$$

یا

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\,(v^2)}{\mathrm{d}\,t}, \tag{5}$$

که v طول ِ بردار ِ $\boldsymbol{v}$ است. به این ترتیب،

$$\int_{\mathbb{C}}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}}\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\,(v^2)}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t, \tag{6}$$

یا

$$\int_{\mathbb{C}}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = \Delta\left(\frac{v^2}{2}\right). \tag{7}$$

که

$$\Delta\,A = A(t_\mathrm{f}) - A(t_\mathrm{i}) \tag{8}$$

i و f سر- ُ-تَه ِ مسیر َند: $t_{\rm i}$ و $t_{\rm f}$ زمانها یِ ابتدا و انتها یِ مسیر َند. $\mathbb{C}$ هم مسیر ِ حرکت است و انتگرال بر مسیر چنین تعریف میشود.

$$\int_{\mathbb{C}} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = \int_{t_{\rm i}}^{t_{\rm f}} [\boldsymbol{A}(t)]\cdot[\boldsymbol{v}(t)]\,\mathrm{d}\,t. \tag{9}$$

معادله یِ (7) رابطه ای بین ِ مکان و سرعت و شتاب است. اما چنان که (9) نشان میدهد، برا یِ محاسبه یِ انتگرال ِ شتاب بر مسیر عملَن دانستن ِ شتاب و سرعت بر حسب ِ زمان لازم است. یک حالت ِ خاص که بستگی به زمان لازم نیست، وقت ی ست که شتاب ثابت باشد. در این صورت،

$$\int_{\mathbb{C}} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\cdot\int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}\,\boldsymbol{r}. \tag{10}$$

اما

$$\int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = \Delta\,\boldsymbol{r}. \tag{11}$$

پس برا یِ وقت ی که شتاب ثابت است،

$$\boldsymbol{a}\cdot\Delta\,\boldsymbol{r} = \Delta\left(\frac{v^2}{2}\right). \tag{12}$$

یک مثال ِ مهم از حالت ِ شتاب- ِ-ثابت حرکت ی ست که در نزدیکی یِ سطح ِ زمین و در ناحیه ای بسیار کوچکتر از شعاع ِ زمین رخ میدهد. شرط ِ اول باعث میشود اندازه یِ شتاب ثابت بماند. شرط ِ دوم هم جهت ِ شتاب را ثابت میکند (در این حالت میشود از انحنا یِ سطح ِ زمین چشم پوشید و سطح ِ زمین را با یک صفحه تقریب کرد). با این شرطها،

$$\boldsymbol{g} = -g\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{13}$$

که (x, y, z) مختصات ِ دِکَرتی یَند و محور ِ z عمود بر سطح ِ زمین رو به بالا گرفته شده. با استفاده از

$$\boldsymbol{r} = x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{14}$$

نتیجه میشود

$$\boldsymbol{a}\cdot\Delta\,\boldsymbol{r} = -g\,\Delta\,z. \tag{15}$$

به این ترتیب،

$$-g\,\Delta\,z = \Delta\,\left(\frac{v^2}{2}\right) \tag{16}$$

یا

$$\Delta\,\left(\frac{v^2}{2} + g\,z\right) = 0, \tag{17}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$\frac{v^2}{2} + g\,z = \text{constant.} \tag{18}$$

رابطه یِ (7) یا حالت خاص ِ آن در شتاب ِ ثابت، (12)، رابطه ای بین ِ مکان و سرعت و شتاب است، اما وقت یِ بُعد ِ حرکت بیش از یک است، این رابطه با معادلات ِ حرکت هم-ارز نیست. علت این است که این رابطه یک معادله یِ اسکالر (عددی) است، در حال ی که معادلات ِ حرکت برداری (هم-ارز با چند معادله یِ اسکالر) اند. مثلَن برا یِ حرکت در سه-بُعد، معادله یِ مکان بر حسب ِ زمان هم-ارز با سه معادله یِ اسکالر است، در حال ی که (7) یک معادله یِ اسکالر است: (7) را میشود از معادله یِ حرکت به دست آورد. اما معادله یِ حرکت را نمیشود از (7) به دست آورد. میشود دنبال کرد که برا یِ رسیدن به (7) از معادله یِ حرکت، کجا کار ی انجام شده که یک-طرفه است، به این معنی که عکس ِ این کار مجاز نیست: معادله یِ (3)، رابطه یِ شتاب با سرعت، در بردار ِ $\boldsymbol{v}$ ضرب ِ داخلی شده. عکس ِ این کار مجاز نیست: نمیشود یک کمیت را بر یک بردار تقسیم کرد.