

## 1 برخورد دُ جسم در یک بُعد

یک شکل ساده‌ی برخورد این است که دُ جسم در یک راستا حرکت میکنند، به هم برمی‌خورند، و سرعت هر یک پس از برخورد هم در هم ان راستا میماند. یک محور را بر این راستا میگذاریم و به جای بردارها با تصویر بردارها در جهت این محور کار میکنیم. پایدگی ی تکانه میشود

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}. \quad (1)$$

این یک معادله برای دُ متغیر (سرعتها ی پس-از-برخورد) است. معادله ی دیگر از رابطه ی انرژی-ی-جنبشی ی پس-از-برخورد با انرژی-ی-جنبشی ی پیش-از-برخورد میثاید:

$$Q = \left( \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2} \right) - \left( \frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2} \right). \quad (2)$$

حل این معادلات در چارچوب مرکز-جرم سادتر است. کمیتها ی متناظر با چارچوب مرکز-جرم را با پریم نشان میدهم. از جمله برای هر سرعت  $v$ ,

$$v = v' + v_{cm}, \quad (3)$$

که

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

البته برخورد سرعت مرکز-جرم را عوض نمیکند. پس ضمنن،

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2}. \quad (5)$$

معادلات در چارچوب مرکز-جرم میشوند

$$0 = m_1 v'_{1f} + m_2 v'_{2f}. \quad (6)$$

$$Q = \left( \frac{m_1 v'_{1f}{}^2}{2} + \frac{m_2 v'_{2f}{}^2}{2} \right) - \left( \frac{m_1 v'_{1i}{}^2}{2} + \frac{m_2 v'_{2i}{}^2}{2} \right). \quad (7)$$

البته رشن است که ضمنن

$$0 = m_1 v'_{1i} + m_2 v'_{2i}. \quad (8)$$

$v'_{2f}$  را از معادله ی (6) به دست میاورم و در معادله ی (7) میگذارم:

$$Q = \left( \frac{m_1 v'_{1f}}{2} + \frac{m_1^2 v'_{1f}}{2m_2} \right) - \left( \frac{m_1 v'_{1i}}{2} + \frac{m_2 v'_{2i}}{2} \right). \quad (9)$$

به این ترتیب،

$$v'_{1f} = \pm \frac{1}{m_1} \sqrt{m_1^2 v'_{1i} + 2 \frac{m_1 m_2 Q}{m_1 + m_2}}, \quad (10)$$

و البته

$$v'_{2f} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1f}. \quad (11)$$

شرط وجود جواب این است که زیر رادیکال منفی نشود:

$$0 \leq \frac{m_1 (m_1 + m_2) v'_{1i}}{2m_2} + Q, \quad (12)$$

که با استفاده از (8) میشود

$$0 \leq \left( \frac{m_1 v'_{1i}}{2} + \frac{m_2 v'_{2i}}{2} \right) + Q, \quad (13)$$

یا

$$0 \leq K'_i + Q, \quad (14)$$

که یعنی

$$0 \leq K'_f. \quad (15)$$

تساوی در (15) متناظر با برخورد کاملن-ناکشسان است. در این حالت دُ-جسم طی برخورد به هم میچسبند، که یعنی سرعت هر جسم در چارچوب مرکز-جرم صفر میشود.

برخورد کشسان متناظر با  $(Q = 0)$  است. در این حالت،

$$v'_{1f} = \pm v'_{1i}. \quad (16)$$

با علامت مثبت، سرعتها ی پس-از-برخورد هم ان سرعتها ی پیش-از-برخورد ند، مثل این که برخوردی رخ نداده.

با استفاده از (10) و (11)، میشود سرعتها در یک چارچوب دیگر را هم به دست آورد. از (10) و (3) نتیجه میشود

$$v_{1f} = v_{cm} \pm \frac{1}{m_1} \sqrt{m_1^2 (v_{1i} - v_{cm})^2 + 2 \frac{m_1 m_2 Q}{m_1 + m_2}}. \quad (17)$$

و با استفاده از (4)،

$$v_{1f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \pm \frac{1}{m_1} \sqrt{\left[ \frac{m_1 m_2 (v_{1i} - v_{2i})}{m_1 + m_2} \right]^2 + 2 \frac{m_1 m_2 Q}{m_1 + m_2}}. \quad (18)$$

به شکل ی مشابه،

$$v_{2f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \mp \frac{1}{m_2} \sqrt{\left[ \frac{m_1 m_2 (v_{1i} - v_{2i})}{m_1 + m_2} \right]^2 + 2 \frac{m_1 m_2 Q}{m_1 + m_2}}. \quad (19)$$

در این دُ-رابطه، علامتها ی پیش از ضریب رادیکال مخالف هم ند: یک ی مثبت است و دیگری منفی ست

برای برخورد کاملن-ناکشسان رادیکال صفر است:

$$v_{1f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}. \quad (20)$$

$$v_{2f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}. \quad (21)$$

یعنی سرعت هر یک از دُ-جسم پس از برخورد هم ان سرعت مرکز-جرم است.

برای برخورد کشسان Q صفر است:

$$v_{1f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \pm \frac{m_2 (v_{1i} - v_{2i})}{m_1 + m_2}. \quad (22)$$

$$v_{2f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \pm \frac{m_1 (v_{2i} - v_{1i})}{m_1 + m_2}. \quad (23)$$

در این دُ-رابطه، علامتها ی پیش از کسرِ دومِ طرفِ - راست یکسان نَد: یا هر- دُ مثبت نَد یا هر- دُ منفی یَنَد. با علامتِ مثبت، سرعتها ی پس-از- برخُرد هم ان سرعتها ی پیش-از- برخُرد نَد، مثلِ این که برخُردی رخ نَداده. حالت ی که برخُرد رخ داده میشود

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2v_{2i}}{m_1 + m_2}. \quad (24)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2}. \quad (25)$$

یک حالتِ خاص این است که جرمها با هم برابر باشند. در این حالت جرمِ هر جسم را با  $m$  نشان

میدهم:

$$v_{1f} = \frac{v_{1i} + v_{2i}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{1i} - v_{2i}}{2}\right)^2 + \frac{Q}{m}}. \quad (26)$$

$$v_{2f} = \frac{v_{1i} + v_{2i}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{v_{1i} - v_{2i}}{2}\right)^2 + \frac{Q}{m}}. \quad (27)$$

برای برخُردِ کاملن-ناکشسان رادیکال صفر است:

$$v_{1f} = \frac{v_{1i} + v_{2i}}{2}. \quad (28)$$

$$v_{2f} = \frac{v_{1i} + v_{2i}}{2}. \quad (29)$$

برای برخُردِ کشسان  $Q$  صفر است:

$$v_{1f} = \frac{v_{1i} + v_{2i}}{2} \pm \frac{v_{1i} - v_{2i}}{2}. \quad (30)$$

$$v_{2f} = \frac{v_{1i} + v_{2i}}{2} \pm \frac{v_{2i} - v_{1i}}{2}. \quad (31)$$

حالت ی که برخُرد رخ داده میشود

$$v_{1f} = v_{2i}. \quad (32)$$

$$v_{2f} = v_{1i}. \quad (33)$$

یعنی اجسام سرعتِ شان را با هم مبادله میکنند.

یک حالتِ حدیِ دیگر این است که یک ی از جرمها خیل ی کوچکتز از دیگری باشد.

$(m_1/m_2)$  را به صفر میل میدهم:

$$v_{1f} = v_{2i} \pm \sqrt{(v_{1i} - v_{2i})^2 + \frac{2Q}{m_1}}. \quad (34)$$

$$v_{2f} = v_{2i}. \quad (35)$$

سرعتِ جسمِ پرجرمتز ثابت میماند.

برا ی برخوردِ کاملن-ناکشسان رادیکال صفر است:

$$v_{1f} = v_{2i}. \quad (36)$$

$$v_{2f} = v_{2i}. \quad (37)$$

برا ی برخوردِ کشسان  $Q$  صفر است:

$$v_{1f} = v_{2i} \pm (v_{1i} - v_{2i}). \quad (38)$$

$$v_{2f} = v_{2i}. \quad (39)$$

حالت ی که برخورد رخ داده میشود

$$v_{1f} = 2v_{2i} - v_{1i}. \quad (40)$$

$$v_{2f} = v_{2i}. \quad (41)$$