1 انرژی و مسائل ِ یک-بُعدی

در یک بُعد، نیرو اگر تابع ِ فقط مکان باشد پایستار است. در این حالت معادله یِ پایستگی یِ انرژی با معادله یِ نیوتُن همئرز است. ممکن است بخش ی از نیرو پایستار باشد و کار ِ حاصل از باقیمانده یِ نیرو صفر باشد. در این صورت هم همچنان میشود پایستگی یِ انرژی را به کار برد، و انرژی-یِ-پتانسیل با آن بخش از نیرو تعریف میشود که پایستار است.

در یک-بُعد، معادله یِ پایستگی یِ انرژی-یِ-مکانیکی چنین است.

$$\frac{m\,v^2}{2} + U(x) = E. \tag{1}$$

v مشتق ِ x است. پس (1) یک معادله-یِ-دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-یک برا یِ x است. معادله یِ نیوتُن یک معادله-یِ-دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-دُ برا یِ x است. میگویند معادله یِ پایستگی یِ انرژی-یِ-مکانیکی یک انتگرال ِ معادله یِ نیوتُن است. جواب ِ معادله یِ نیوتُن با دُ ثابت به دست میئاید، چون معادله یِ نیوتُن مرتبه-یِ-دُ است. معادله یِ (1) مرتبه-یِ-یک است. پس جواب ِ آن با یک ثابت به دست میئاید. اما معادله یِ (1) خُد ِش شامل ِ یک ثابت (E) است. پس جواب ِ آن هم کلَن دُ ثابت دارد.

انرژی یِ جنبشی، جمله یِ اول ِ طرف ِ چپ ِ معادله یِ (1)، نامنفی ست. پس $(E-U)$ هم باید نامنفی باشد. یعنی جسم در x ها یی که $[E-U(x)]$ منفی باشد پیدا نخاهد شد. به هم ین خاطر ناحیه ای که در آن $(E-U)$ منفی ست را ناحیه یِ ممنوع مینامند.

برا یِ حل ِ معادله یِ (1)، متغیرها یِ t و x را از هم جدا میکنند:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 = \frac{2\,[E-U(x)]}{m}. \tag{2}$$

پس،

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \pm\sqrt{\frac{2\,[E-U(x)]}{m}}. \tag{3}$$

$$\mathrm{d}\,t = \pm\sqrt{\frac{m}{2\,[E-U(x)]}}\,\mathrm{d}\,x. \tag{4}$$

از این رابطه انتگرال میگیرم:

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\, t' = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\, x' \left\{\pm\sqrt{\frac{m}{2\,[E - U(x')]}}\right\}, \tag{5}$$

یا

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\, x' \left\{\pm\sqrt{\frac{m}{2\,[E - U(x')]}}\right\}. \tag{6}$$

البته این را میشود به شکلِ انتگرالِ نامعین هم نوشت:

$$t - t_0 = \int \mathrm{d}\, x \left\{\pm\sqrt{\frac{m}{2\,[E - U(x)]}}\right\}. \tag{7}$$

به این ترتیب، علی‌الاصول t بر حسبِ x (و البته دُ ثابت) به دست میئاید. برا یِ محاسبه یِ x بر حسبِ t، باید (6) یا (7) را وارون کرد. این که در این عبارات علامتِ $+$ یا $-$ انتخاب شود، به این مربوط است که سرعت مثبت است (جسم به راست میرود) یا منفی ست (جسم به چپ میرود).

بدونِ محاسبه یِ انتگرالها هم میشود اطلاعات ی کیفی در باره یِ حرکت به دست آورد. گیرم در زمانِ اولیه جسم در x_0 است و سرعتَ ش v_0 است. در این صورت

$$E = \frac{m\,v_0^2}{2} + U(x_0), \tag{8}$$

و البته معلوم است که E بزرگتر از $U(x_0)$ است، مگر v_0 صفر باشد، که این صورت E با $U(x_0)$ برابر است. اگر v_0 منفی باشد، جسم به چپ میرود، تا جا یی که U برابر با E شود. اگر چنین-جا یی نبود (U در همه یِ جاها یی که طرفِ چپِ x_0 اند کوچکتر از E بود)، سرعتِ جسم هیچ وقت صفر نمیشود و جسم برنمیگردد. اما اگر یک x_1 در طرفِ چپِ x_0 بود که

$$U(x_1) = E, \tag{9}$$

در x_1 سرعتِ ذره صفر میشود. اینجا نیرو میشود

$$F(x_1) = -(\mathrm{D}\, U)(x_1), \tag{10}$$

که $(\mathrm{D}\, U)$ مشتقِ U است. U در x_1 برابر با E است و در x ها یی که در (x_1, x_0) اند از E کوچکتر است. پس برا یِ این x ها،

$$U(x) - U(x_1) < 0. \tag{11}$$

این نشان میدهد مشتقِ U در x_1 نامنفی ست. پس جر در حالتِ خاص ی $[(\mathrm{D}\, U)(x_1)]$ صفر است،

$$F(x_1) > 0. \tag{12}$$

این یعنی در x_1 شتابِ جسم مثبت است. سرعتِ جسم هم صفر بود. پس جسم در x_1 نمیمانَد و به راست حرکت میکند. به این خاطر به x_1 یک نقطه یِ بازگشت میگویند.

حالا جسم دارد به راست میرود. بینِ x_1 و x_0، انرژی یِ پتانسیل کمتر از E است، پس سرعت صفر نمیشود. طرفِ راستِ x_0 ممکن است همه جا انرژی یِ پتانسیل کمتر از E باشد. در این صورت سرعتِ جسم هیچ وقت صفر نمیشود و جسم به راست میرود و برنمیگردد. اما اگر یک نقطه یِ x_2 بود که در آن انرژی یِ پتانسیل با E برابر شد، در آن نقطه سرعتِ جسم صفر میشود و پس از آن جسم باز به چپ میرود. x_2 هم یک نقطه یِ بازگشت میشود. از جمله دیده میشود اگر دُ نقطه یِ بازگشت وجود داشته باشد، یعنی یک x_1 و یک x_2 وجود داشته باشد که انرژی یِ پتانسیل بینِ آنها کمتر از E و به ازا یِ آنها برابر با E باشد، حرکتِ جسم دُرِئی ست. دُره یِ حرکت را با T نشان میدهم. مدت ی که طول میکشد تا جسم از x_1 به x_2 برود نصفِ دُره است:

$$\frac{T}{2} = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}\, x \sqrt{\frac{m}{2\,[E - U(x)]}}. \tag{13}$$

اگر مشتقِ انرژی-یِ-پتانسیل در نقطه یِ b صفر شود، $F(b)$ صفر است. پس شتابِ جسم در b صفر است. این یعنی جسم اگر در یک زمان در b باشد و در آن زمان سرعت َش صفر باشد، هم ان جا میمانَد. به این خاطر به نقطه یِ b یک نقطه یِ تعادل میگویند. اگر جسم کم ی طرفِ راستِ b باشد، نیرو یِ وارد بر آن (و در نتیجه شتابِ آن) مثبت است اگر نیرو در یک همسایگی طرفِ راستِ b مثبت باشد، و منفط ست اگر نیرو در یک همسایگی طرفِ راستِ b منفی باشد. در حالتِ اول، نیرو جسم را از b دور میکند و در حالتِ دوم نیرو جسم را به b بر میگردانَد. مشابهِ هم ین برا یِ جاها یی که طرفِ چپِ b اند رخ میدهد. فقط در یک حالت است که نیرو جسمِ در نزدیکی یِ b را، چه طرفِ

راست باشد و چه طرف ِ چپ، به b بر میگردانَد: حالت ی که در یک همسایگی از b، نیرو در طرف ِ راست ِ b منفی و در طرف ِ چپ ِ b مثبت است. اگر چنین باشد، میگویند نقطه-یِ-تعادل ِ b پایدار است. در غیر ِ این صورت میگویند نقطه-یِ-تعادل ِ b ناپایدار است. بر حسب ِ انرژی-یِ-پتانسیل، نقطه-یِ-تعادل ِ b پایدار است اگر و تنها اگر در یک همسایگی از b، انرژی-یِ-پتانسیل در طرف ِ راست ِ b صعودی و در طرف ِ چپ ِ b نزولی باشد. این یعنی انرژی-یِ-پتانسیل در b مُضعَن کمینه شود.

گیرم b یک نقطه یِ تعادل ِ پایدار است، و انرژی-یِ-پتانسیل در این نقطه دُ بار مشتق-پذیر است. این که انرژی-یِ-پتانسیل در b کمینه میشود، نتیجه میدهد در b مشتق ِ اول ِ آن صفر است و مشتق ِ دوم ِ آن نامنفی ست. گیرم مشتق ِ دوم ِ انرژی-یِ-پتانسیل در b نامنفی ست. این مقدار ِ نامنفی را با k نشان میدهم. بسط ِ تِیلِر ِ انرژی-یِ-پتانسیل اطراف ِ b چنین میشود

$$U(x) = U(b) + \frac{k\,(x-b)^2}{2} + \cdots\,. \tag{14}$$

اگر جا-به-جایی از b کوچک باشد، میشود از باقیمانده یِ بسط چشم پوشید. چنین میکنم. نیرو میشود

$$F(x) = -k\,(x-b). \tag{15}$$

این هم ان قانون ِ هوک برا یِ نیرو یِ بازدارنده است. دیده میشود این شکل ِ نیرو به طُر ِ کلی اطراف ِ نقاط ِ تعادل ِ پایدار ظاهر میشود، به شرط ی که جا-به-جایی نسبت به نقطه یِ تعادل کم باشد (دامنه یِ حرکت کوچک باشد).

قبلَن معلوم شد یک ثابت ِ جمعی در انرژی-یِ-پتانسیل، بر حرکت ِ جسم اثر ی ندارد. پس در رابطه یِ (14) میشود $U(b)$ را حذف کرد. اگر جا-به-جایی هم کوچک باشد، چنان که بشود از باقیمانده یِ بسط-ِ-تِیلِر ِ انرژی-یِ-پتانسیل چشم پوشید، (14) میشود

$$U(x) = \frac{k\,(x-b)^2}{2}. \tag{16}$$

به این (با ثابت ِ جمعی یا بدون ِ آن)، انرژی-یِ-پتانسیل ِ نوسانگر-ِ-هماهنگ میگویند. معادله یِ (7) میشود

$$t - t_0 = \int \mathrm{d}\,x\, \left\{\pm\sqrt{\frac{m}{2\,E - k\,(x-b)^2}}\right\}. \tag{17}$$

A را چنین تعریف میکنم.

$$A=\sqrt{\frac{2\,E}{k}}. \tag{18}$$

به این ترتیب،

$$t-t_0=\mp\sqrt{\frac{m}{k}}\,\cos^{-1}\frac{x-b}{A}, \tag{19}$$

یا،

$$x=b+A\,\cos[\omega\,(t-t_0)], \tag{20}$$

که

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{21}$$

به این حرکت، حرکت ِ هماهنگ ِ ساده میگویند. b نقطه یِ تعادل ِ پایدار است و میشود مبدئ را بر آن گذاشت، که یعنی b را صفر کرد. A دامنه یِ حرکت است. دُره یِ حرکت هم میشود

$$T=\frac{2\,\pi}{\omega}. \tag{22}$$

این را میشود از (13) هم حساب کرد. لطفَن این کار را بکنید. مشخصه یِ حرکت ِ هماهنگ- ِ-ساده این است که دُره یِ حرکت مستقل از دامنه است.

معلوم شد حرکت ِ هماهنگ ِ ساده بسیار عام است. معادله-یِ-دیفرانسیل ی به شکل ِ

$$\alpha\,\ddot{\xi}+\beta\,\xi=0, \tag{23}$$

که α و β ثابت و مثبت باشند، به این معادله مینجامد.

$$\frac{\alpha\,\dot{\xi}^2}{2}+\frac{\beta\,\xi^2}{2}=\gamma, \tag{24}$$

که γ ثابت ی مثبت است. جواب ِ این معادله هم میشود

$$\xi=\sqrt{\frac{2\,\gamma}{\beta}}\,\cos[\omega\,(t-t_0)], \tag{25}$$

که

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{26}$$

به عنوان ِ یک مثال، یک آونگ ِ ساده را بررسی میکنم که یک نخ ِ سبک به طول ِ ℓ است که یک سر َ ش از یک نقطه یِ ثابت آویزان است و سر ِ دیگر َ ش به یک جسم به جرم ِ m وصل است. حرکت ی را در نظر میگیرم که در یک صفحه یِ قائم انجام میشود. در این حرکت، جا یِ جسم با یک زاویه یِ θ مشخص میشود: زاویه ای که نخ با راستا یِ قائم ِ رو-به-پایین میسازد. محور ِ y را قائم و رو-به-بالا، و مبدئ را نقطه یِ آویز میگیرم. پس برا یِ جسم،

$$y = -\ell\,\cos\theta. \tag{27}$$

به جسم دُ نیرو وارد میشود: وزن ِ جسم و کشش ِ نخ. کار ِ دومی صفر است، چون جسم بر یک دایره به شعاع ِ ℓ حرکت میکند و در هر نقطه سرعت ِ جسم مماس بر دایره در آن نقطه است و نیرو یِ کشش در راستا یِ شعاع ی ست که از آن نقطه میگذرد. نیرو یِ وزن را هم میشود از انرژی-یِ-پتانسیل ِ

$$U = m\,g\,y \tag{28}$$

به دست آورد. با استفاده از رابطه یِ y با θ،

$$U = -m\,g\,\ell\,\cos\theta. \tag{29}$$

اندازه یِ سرعت ِ جسم هم $(\ell\,\dot\theta)$ است. معادله یِ پایستگی یِ انرژی میشود

$$\frac{m\,\ell^2\,\dot\theta^2}{2} - m\,g\,\ell\,\cos\theta = E. \tag{30}$$

انرژی یِ پتانسیل در $(\theta = 0)$، پایینترین نقطه یِ ممکن برا یِ جسم، کمینه است. اطراف ِ این نقطه،

$$U = -m\,g\,\ell + \frac{m\,g\,\ell\,\theta^2}{2} + \cdots\,. \tag{31}$$

با مقایسه با مسئله یِ نوسانگر- ِ-هماهنگ (لطفَن پارامترها یِ متناظر را مشخص کنید) دیده میشود برا یِ حرکات ِ کم-دامنه

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \tag{32}$$

یا

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{33}$$

به عنوان ِ یک مثال ِ دیگر، حرکت ِ یک جسم در میدان ِ گرانشی یِ زمین را در نظر بگیرید، وقت ی جسم لزومَن نزدیک ِ سطح ِ زمین نیست. این حرکت یک-بُعدی نیست، اما همچنان با استفاده از پایستگی یِ انرژی میشود چیزها یی در باره یِ آن به دست آورد. نیرو یی که زمین به یک جسم به جرم ِ m وارد میکند

$$\boldsymbol{F} = -\frac{G\,M\,m\,\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{34}$$

است، که $\boldsymbol{r}$ مکان نسبت به مرکز ِ زمین، M جرم ِ زمین، و G ثابت ِ جهانی یِ گرانش است. مئلفِها یِ این نیرو میشوند

$$F_x = -\frac{G\,M\,m\,x}{r^3}. \tag{35}$$

$$F_y = -\frac{G\,M\,m\,y}{r^3}. \tag{36}$$

$$F_z = -\frac{G\,M\,m\,z}{r^3}. \tag{37}$$

همچنین،

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{38}$$

این نیرو پایستار است. (لطفَن مشتق ِ مئلفِها یِ این نیرو نسبت به مختصات را به دست آورید و این را نشان دهید.) پس این نیرو را میشود از یک انرژی-یِ-پتانسیل به دست آورد. لطفَن این انرژی-یِ-پتانسیل را حساب کنید و نشان دهید

$$U = -\frac{G\,M\,m}{r}. \tag{39}$$

پایستگی یِ انرژی میشود

$$\frac{m\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2} - -\frac{G\,M\,m}{r} = E. \tag{40}$$

یک جسم در نقطه یِ $\boldsymbol{r}_0$ سرعت َش $\boldsymbol{v}_0$ است. پس

$$\frac{m\,\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}_0}{2}-\frac{G\,M\,m}{r_0}=E. \tag{41}$$

آیا این جسم میتواند از گرانش ِ زمین بگریزد (به بینهایت برود)؟ برا یِ این که چنین شود، انرژی-یِ-پتانسیل در بینهایت نباید بیش از انرژی باشد. پس شرط ِ لازم برا یِ گریز میشود

$$E\geq 0, \tag{42}$$

که یعنی

$$v_0\geq v_{\mathrm{e}}, \tag{43}$$

که

$$v_{\mathrm{e}}=\sqrt{\frac{2\,G\,M}{r_0}}. \tag{44}$$

به v_{e} سرعت ِ فرار میگویند.

یک سئال ِ دیگر. سرعت ِ v_{o}، که جسم با آن در مدار ی دایرِئی به مرکز ِ زمین و شعاع ِ r_0 میمانَد چه قدر است؟ برا یِ این که جسم در مدار ِ دایرِئی بماند، نیرو یِ گرانش باید برابر با جرم ِ جسم ضرب در شتاب ِ مرکزگرا باشد:

$$\frac{G\,M\,m}{r_0^2}=\frac{m\,v_{\mathrm{o}}^2}{r_0}. \tag{45}$$

پس،

$$v_{\mathrm{o}}=\sqrt{\frac{G\,M}{r_0}}. \tag{46}$$

یعنی سرعت ِ فرار $\sqrt{2}$ برابر ِ سرعت در مدار ِ دایرِئی ست.