1 انرژی ی ِ پتانسیل، پایستگی ی ِ انرژی

قضیه ی ِ کار-انرژی-ی ِ-جنبشی میگوید تغییر ِ انرژی-ی ِ-جنبشی برابر با کار است:

$$\Delta K = W. \tag{1}$$

شکل ِ دیفرانسیلی ی ِ این قضیه هم این است که مشتق ِ انرژی-ی ِ-جنبشی نسبت به زمان توان است:

$$\frac{\mathrm{d}\,K}{\mathrm{d}\,t} = P. \tag{2}$$

حالتها یی هست که نیرو تابع ِ فقط مکان است (به سرعت و زمان بستگی نداشته ندارد)، و مشتق ِ یک تابع نسبت به مکان است:

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\,U, \tag{3}$$

(علامت ِ منفی فقط به خاطر ِ یک قرارداد است) که

$$\boldsymbol{\nabla}\,U = \hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{\partial\,U}{\partial\,x} + \hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{\partial\,U}{\partial\,y} + \hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{\partial\,U}{\partial\,z}. \tag{4}$$

در این صورت توان میشود

$$\begin{aligned}
P &= -(\boldsymbol{\nabla}\,U)\,\cdot\,\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t},\\
&= -\left(\frac{\partial\,U}{\partial\,x}\,\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial\,U}{\partial\,y}\,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial\,U}{\partial\,z}\,\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}\right),\\
&= -\frac{\mathrm{d}\,\{U[\boldsymbol{r}(t)]\}}{\mathrm{d}\,t}.
\end{aligned} \tag{5}$$

برابری ی ِ آخر قاعده ی ِ زنجیرئی ی ِ مشتق-گیری ست. به این ترتیب (2) میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,K}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,t}, \tag{6}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}\,(K+U)}{\mathrm{d}\,t} = 0. \tag{7}$$

به U انرژی یِ پتانسیل میگویند. انرژی یِ مکانیکی را با E نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$E = K + U. \tag{8}$$

به این ترتیب (7) میشود

$$E = \text{constant}. \tag{9}$$

به این، پایستگی یِ انرژی یِ مکانیکی (یا سادِتر، پایستگی یِ انرژی) میگویند.

گیرم نیرو تابع ِ فقط مکان است و (3) را برمیئاورَد. از (5) دیده میشود کار ِ نیرو بر خم ِ $\mathbb{C}$ میشود

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{C}} &= -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\, t \, \frac{\mathrm{d}\, \{U[\boldsymbol{r}(t)]\}}{\mathrm{d}\, t}, \\ &= -\{U[\boldsymbol{r}(t_2)] - U[\boldsymbol{r}(t_1)]\}, \end{aligned} \tag{10}$$

که $\boldsymbol{r}(t_1)$ ابتدای یِ خم ِ $\mathbb{C}$ و $\boldsymbol{r}(t_1)$ انتهای یِ خم ِ $\mathbb{C}$ است. پس اگر خم تغییر کند، یا رابطه یِ مکان با زمان تغییر کند، اما ابتدا و انتها یِ خم عوض نشود، کار ِ نیرو تغییر نمیکند. در این حالت میگویند کار به مسیر بستگی ندارد (منظور این است که به فقط ابتدا و انتها یِ مسیر بستگی دارد). میشود نشان داد عکس ِ این هم درست است. یعنی اگر کار ِ یک نیرو برا یِ همه یِ مسیرها به فقط ابتدا و انتها یِ مسیر بستگی داشته باشد، آن نیرو تابع ِ فقط مکان است و مشتق ِ یک تابع ِ اسکالر است. همچنین، به سادگی دیده میشود این که کار به فقط ابتدا و انتها یِ هم بستگی داشته باشد، با این همئرز است که کار بر هر حلقه (مسیر ِ بسته) صفر باشد.

پس این سه-گزاره با هم همئرز َند:

نیرو تابع ِ فقط مکان است و مشتق ِ یک تابع ِ اسکالر است.

انتگرال ِ نیرو بر هر مسیر به فقط ابتدا و انتها یِ مسیر بستگی دارد.

انتگرال ِ نیرو بر هر حلقه صفر است.

در واقع این گزارِها برا یِ هر میدان ِ برداری (تابع ی که مقدار َش بردار است) همئرز َند. لازم نیست آن میدان ِ برداری اسم َش نیرو باشد. اگر نیرو یی این شرطها را براورَد میگویند آن نیرو پایستار است.

مثال ِ زیر نشان میدهد این شرطها بدیهی نیستند. در فضا یِ دُ-بُعدی، نیرو یِ $\boldsymbol{F}$ چنین است.

$$\boldsymbol{F} = (A\,x)\,(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}), \tag{11}$$

که A ثابت ی ناصفر است. خم ِ $\mathbb{C}_1$ را با این معادلات تعریف میکنم.

$$t \in [0, T]. \tag{12}$$

$$x(t) = b\,t. \tag{13}$$

$$y(t) = b\,t. \tag{14}$$

T و b ثابتها یی مثبت َند. دیده میشود ابتدا یِ این خم $(0, 0)$ و انتها یِ این خم $(b\,T, b\,T)$ است. $\mathbb{C}_1$ یک پاره-خط است که از نقطه یِ اول شروع و در نقطه یِ دوم تمام میشود. از معادلات ِ خم نتیجه میشود

$$\boldsymbol{v}(t) = b\,(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}). \tag{15}$$

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)] = A\,b\,t\,(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}). \tag{16}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = 2\,A\,b^2\,t. \tag{17}$$

به این ترتیب،

$$W_{\mathbb{C}_1} = A\,b^2 T^2. \tag{18}$$

(لطفَن این محاسبه را انجام دهید.) خم ِ $\mathbb{C}_2$ را با این معادلات تعریف میکنم.

$$t \in [0, T]. \tag{19}$$

$$x(t) = b\,t. \tag{20}$$

$$y(t) = \frac{b\,t^2}{T}. \tag{21}$$

T و b ثابتها یی مثبت َند. دیده میشود $\mathbb{C}_2$ یک سهمی ی ست که ابتدا و انتها یَ ش هم ان ابتدا و انتها یِ $\mathbb{C}_1$ است. از معادلات ِ خم نتیجه میشود

$$\boldsymbol{v}(t) = b\,\left(\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{2\,t}{T}\,\hat{\boldsymbol{y}}\right). \tag{22}$$

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)] = A\,b\,t\,(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}). \tag{23}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = A\,b^2\,t\,\left(1 + \frac{2\,t}{T}\right). \tag{24}$$

به این ترتیب،

$$W_{\mathbb{C}_2} = \frac{5\,A\,b^2T^2}{6}. \tag{25}$$

(لطفَن این محاسبه را انجام دهید.) پس $\boldsymbol{F}$ پایستار نیست. این مثال ضمنَن نشان میدهد این که نیرو تابع ِ فقط مکان باشد هم تضمین نمیکند نیرو پایستار است. در یک مثال ِ دیگر، نیرو یِ $\boldsymbol{F}$ چنین است.

$$\boldsymbol{F} = A\,[y\,\hat{\boldsymbol{x}} + (x+y)\,\hat{\boldsymbol{y}}], \tag{26}$$

که A ثابت است. لطفَن کار ِ این نیرو بر هم ان خمها یِ $\mathbb{C}_1$ و $\mathbb{C}_2$ را حساب کنید و نشان دهید

$$W_{\mathbb{C}_1} = \frac{3\,A\,b^2T^2}{2}. \tag{27}$$

$$W_{\mathbb{C}_2} = \frac{3\,A\,b^2T^2}{2}. \tag{28}$$

البته این که کار بر این دُ-مسیر ِ خاص یکسان است ثابت نمیکند این نیرو پایستار است. یک راه ِ اثبات ِ این که این نیرو پایستار است، این که برا یِ آن یک انرژی-یِ-پتانسیل ساخته شود، یعنی یک U به دست اید که (3) را برمیٔاورَد. یعنی

$$A\,y = -\frac{\partial\,U}{\partial\,x}. \tag{29}$$

$$A\,(x+y) = -\frac{\partial\,U}{\partial\,y}. \tag{30}$$

با انتگرال-گیری از (29) نسبت به x در y ِ ثابت، معلوم میشود U_1 یک جواب ِ خاص برا یِ U در معادله یِ (29) است:

$$U_1 = -A\,x\,y. \tag{31}$$

برا یِ به-دست-آوردن ِ جواب ِ کلی یِ (29)، میشود از این استفاده کرد که

$$\frac{\partial\,(U - U_1)}{\partial\,x} = 0. \tag{32}$$

$(U - U_1)$ مشتق َش نسبت به x صفر است. پس تابع ِ فقط y است (به x بستگی ندارد). این تفاضل را با g نشان میدهم:

$$U(x,y) = -A\,x\,y + g(y). \tag{33}$$

این را در (30) میگذارم:

$$A\,(x+y) = A\,x - \frac{\partial\,g}{\partial\,y}. \tag{34}$$

البته مشتق ِ g عملَن مشتق ِ معمولی ست نَ پارِئی، چون g یک-متغیره است. پس

$$\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,y} = -A\,y. \tag{35}$$

$$g = -\frac{A\,y^2}{2} + C, \tag{36}$$

که C یک ثابت است. به این ترتیب،

$$U(x,y) = -A\,\left(x\,y + \frac{y^2}{2}\right) + C. \tag{37}$$

C اختیاری ست. این که در جواب یک ثابت ِ جمعی یِ مانده که آزاد است، خاص ِ این مثال نیست. معلوم است که اگر U معادله یِ (3) را براورَد، U به اضافه یِ یک ثابت هم این معادله را برمیئاورَد.

از مثال ِ بالا برمیئاید اثبات ِ پایستار-بودن ِ یک نیرو با استفاده یِ مستقیم از تعریف، همیشه ساده نیست: یا باید انرژی-یِ-پتانسیل ی یافت که (3) را برمیئاورد (یا نشان داد چنین-تابع ی وجود دارد)،

یا باید کار ِ نیرو بر همه ی ِ حلقِها صفر میشود، یا برا ی ِ همه ی ِ خمها به فقط ابتدا و انتها ی ِ خم بستگی دارد. در مثال ِ بالا اثبات از طریق ِ یافتن ِ انرژی-ی-پتانسیل انجام شد.

اما یک راه ِ دیگر هم هست. اگر معادله ی ِ (3) برقرار باشد،

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{38}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{39}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{40}$$

از دُ-معادله ی ِ اول، به ترتیب، نتیجه میشود

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}. \tag{41}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}. \tag{42}$$

برا ی ِ توابع ِ به-حد- ِ-کافی هموار، مشتقها ی ِ پارِئی را میشود با هم جا-به-جا کرد. پس طرفها ی ِ راست ِ دُ-رابطه ی ِ اخیر با هم برابر َند. نتیجه میشود طرفها ی ِ چپ هم با هم برابر َند:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \tag{43}$$

به هم ین ترتیب،

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}. \tag{44}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}. \tag{45}$$

(43) تا (45) شرطها ی ِ لازم برا ی ِ این َند که $\boldsymbol{F}$ (که تابع ِ فقط مکان است) پایستار باشد. در حالت ِ کلی برا ی ِ فضا ی ِ n-بُعدی، این شرطها میشوند

$$\frac{\partial F_i}{\partial r_j} = \frac{\partial F_j}{\partial r_i}, \tag{46}$$

که باید برا ی ِ هر زُج ِ i و j براورده شوند. r_j ها مختصات َند، و F_j ها مئلفِها ی ِ $\boldsymbol{F}$ اند. از جمله، در فضا ی ِ دُ-بُعدی تنها-شرط هم ان (43) است. و در فضا ی ِ یک-بُعدی از این راه هیچ شرط ی به دست نمیئاید.

این شرطها برا یِ این که $\boldsymbol{F}$ پایستار باشد لازم َند. اما کافی هم هستند؟ میشود نشان داد به شکلِ مُضعِی بله. یعنی اگر این شرطها در یک همسایگی از یک نقطه برقرار باشند، در آن همسایگی یک تابع هست که مشتق َ ش $\boldsymbol{F}$ میشود. پس با چشم-پوشیدن از این نکته یِ فنی یِ ترسناک («مُضعِی») میشود برا یِ فهمیدن ِ این که یک نیرو (یِ تابع ِ فقط مکان) پایستار است یا نَ، فقط رابطه یِ (46) بررسی شود. البته به جا یِ آن نکته یِ فنی میشود یک نکته یِ فنی یِ دیگر گذاشت (که لابد آن هم ترسناک است)، ولی لطفَن یاد ِ تان باشد که ترسناک یا ناترسناک، آن نکتِها یِ فنی هستند و جاها یی خُد ِ شان را نشان میدهند.

معلوم شد اگر فضا یک-بُعدی باشد، (46) در واقع هیچ شرط ی نمیدهد. این عجیب نیست. در فضا یِ یک-بُعدی، $\boldsymbol{F}$ فقط یک مئلفه دارد که آن را با F نشان میدهم. F و U هم یک-متغیره اند. متغیر را با x نشان میدهم. (3) میشود

$$F=-\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,x} \tag{47}$$

و این معادله برا یِ U جواب دارد: $(-U)$ انتگرال ِ نامعین ِ F است. پس اگر فضا یک-بُعدی باشد، این که نیرو پایستار است همئرز با این است که نیرو تابع ِ فقط مکان است، یعنی به زمان و سرعت بستگی ندارد.

سرانجام، تعریف ِ انرژی-یِ-پتانسیل بر اساس ِ مشتق ِ آن است. پس همیشه میشود به انرژی-یِ-پتانسیل یک ثابت افزود. افزودن ِ یک ثابت به انرژی-یِ-پتانسیل باعث میشود آن ثابت به انرژی-یِ-مکانیکی هم اضافه شود. و اینها بر حرکت ِ ذران اثر ی ندارند. میگویند خُد ِ انرژی-یِ-پتانسیل یا انرژی-یِ-مکانیکی مشاهده-پذیر نیستند، فقط اختلاف- ِ-انرژی (یِ پتانسیل یا مکانیکی) مشاهده-پذیر است. یا میگویند صفر (یا مبدئ) ِ انرژی-یِ-پتانسیل یا انرژی-یِ-مکانیکی اختیاری ست. البته رُشن است که مقدار ی که انرژی-یِ-پتانسیل جا-به-جا میشود هم ان مقدار ی ست که انرژی-یِ-مکانیکی جا-به-جا میشود.