1 کار، انرژی یِ جنبشی

معادله یِ نیوتُن برا یِ یک ذره به جرم ِ m این است.

$$m\,\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\,t}=\boldsymbol{F}. \tag{1}$$

این را در $\boldsymbol{v}$ ضرب ِ درونی میکنم:

$$m\,\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\,t}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{2}$$

با استفاده از

$$\frac{\mathrm{d}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}\,t}=2\,\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\,t}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{3}$$

نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\left(\frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{4}$$

به عبارت ِ درون- ِ-پرانتز انرژی یِ جنبشی میگویند. به طرف ِ راست هم توان (ِ نیرو یِ $\boldsymbol{F}$) میگویند. انرژی یِ جنبشی را با K و توان را با P نشان میدهم:

$$K=\frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{5}$$

$$P=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,K}{\mathrm{d}\,t}=P. \tag{7}$$

کار (ِ نیرو یِ $\boldsymbol{F}$) را انتگرال ِ توان (ِ نیرو یِ $\boldsymbol{F}$) بر زمان تعریف میکنم. کار را با W نشان میدهم:

$$W=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}\,t\,\boldsymbol{F}[t,\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t)]\cdot\boldsymbol{v}(t). \tag{8}$$

این، کار از زمان ِ t_1 تا زمان ِ t_2 است. با استفاده از

$$\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}, \tag{9}$$

این رابطه را چنین هم مینویسند.

$$W = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}\,\boldsymbol{r}\cdot\,\boldsymbol{F}, \tag{10}$$

که $\mathbb{C}$ مسیر است. البته باید توجه داشت که نیرو در حالت ِ کلی تابع ِ زمان و مکان و سرعت است. و هر چند رابطه ی ِ بالا را میشود چنین نوشت

$$W = \lim_{|\Delta\,\boldsymbol{r}|\to 0}\sum_j \boldsymbol{F}_j\cdot(\Delta\,\boldsymbol{r})_j, \tag{11}$$

که در آن مسیر تکه-تکه شده و $\boldsymbol{F}_j$ نیرو در تکه ی ِ j است، $\boldsymbol{F}_j$ علاوه بر این که احتمالًا به جا ی ِ تکه ی ِ j وابسته است، ممکن است تابع ِ زمان و سرعت ِ متحرک در تکه ی ِ j هم باشد. انتگرال ِ (7) میشود

$$\Delta\,K = W. \tag{12}$$

به این، قضیه ی ِ کار-انرژی-ی ِ-جنبشی میگویند.

مثلًا، یک جسم رو ی ِ یک سطح ِ شیبدار با زاویه ی ِ θ نسبت به سطح ِ افقی پایین میاید. قضیه ی ِ کار-انرژی-ی ِ-جنبشی میگوید

$$\Delta\,K = W_g + W_f + W_N, \tag{13}$$

که W_g و W_f و W_N کار ِ، به ترتیب، وزن، نیرو ی ِ عمود-بر-سطح، و اصطکاک َند. بردار ِ یکه ی ِ مماس بر سطح ِ شیبدار به سو ی ِ پایین را با $\hat{e}$ نشان میدهم. وزن، نیرو ی ِ عمود-بر-سطح، و اصطکاک (f)، هر سه ثابت َند. پس کار ِ هر یک میشود نیرو ی ِ متناظر ضرب ِ درونی در جا-به-جایی. بردار ِ جا-به-جایی ($s\,\hat{e}$) است. وزن ($m\,\boldsymbol{g}$) است. نیرو ی ِ اصطکاک مماس بر سطح به سو ی ِ بالا ست (چون جسم به پایین حرکت میکند). نیرو ی ِ عمود-بر-سطح بر جا-به-جایی (که مماس بر سطح است) عمود است. پس W_N صفر است. کار ِ نیروها ی ِ دیگر هم میشود

$$\begin{aligned} W_g &= m\,s\,\boldsymbol{g}\cdot\hat{\boldsymbol{e}},\\ &= m\,g\,s\,\sin\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

$$W_f = -s\,f. \tag{15}$$

به این ترتیب،

$$\frac{m\,v^2}{2}-\frac{m\,v_0^2}{2}=s\,(m\,g\,\sin\theta-f). \tag{16}$$

v_0 سرعتِ اولیه یِ جسم است. از این رابطه نسبت به زمان مشتق میگیرم. در طرفِ راست هم چیز جز s ثابت است، و

$$\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}=v. \tag{17}$$

نتیجه میشود

$$m\,v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=v\,(m\,g\,\sin\theta-f). \tag{18}$$

پس،

$$m\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=m\,g\,\sin\theta-f. \tag{19}$$

این هم ان است که از قانونِ دوم نیوتُن به دست میاید. عجیب هم نیست. قضیه یِ کار-انرژی-یِ-جنبشی با ضرب-ِ-درونی-کردنِ قانونِ دومِ نیوتُن در سرعت (و بعد انتگرال-گیری بر زمان) به دست آمد. برا یِ حرکتِ یک-بُعدی، میشود رابطه یِ قضیه یِ کار-انرژی-یِ-جنبشی را (پس از مشتق-گیری نسبت به زمان) بر سرعت تقسیم کرد و به قانونِ دومِ نیوتُن رسید. پس در یک-بُعد، قانونِ دومِ نیوتُن با قضیه یِ کار-انرژی-یِ-جنبشی همئرز است.

در بیش از یک-بُعد؛ میشود یک رابطه یِ برداری (مثلَن قانونِ دومِ نیوتُن) را در سرعتِ ضربِ درونی کرد، اما نمیشود یک رابطه یِ اسکالر (مثلَن مشتقِ قضیه یِ کار-انرژی-یِ-جنبشی) را بر بردارِ سرعت تقسیم کرد. پس میشود از قانونِ دومِ نیوتُن به قضیه یِ کار-انرژی-یِ-جنبشی رسید، اما بر عکس نَ.

مثالِ بالا را کم ی تغییر میدهم. گیرم جسم رو یِ یک سطحِ نَ-لزومَن-تخت حرکت میکند، ولی اصطکاک ناچیز است. کارِ نیرو یِ عمود-بر-سطح همچنان صفر است، چون در هر لحظه نیرو یِ عمود-بر-سطح بر سطح عمود است، پس بر سرعتِ جسم در آن لحظه (که بر سطح در آن نقطه مماس

است) عمود است. این یعنی توان ِ نیرو یِ عمود-بر-سطح صفر است، که نتیجه میدهد کار ِ این نیرو صفر است. وزن ثابت است. پس کار ِ آن میشود وزن ضرب ِ درونی در جا-به-جایی:

$$W_g = m\,\boldsymbol{g}\cdot(\Delta\,\boldsymbol{r}). \tag{20}$$

$\boldsymbol{g}$ قائم و رو به پایین است. پس،

$$W_g = -m\,g\,\Delta\,h, \tag{21}$$

که $(\Delta\,h)$ اختلاف- ِ-ارتفاع است. قضیه یِ کار-انرژی-یِ-جنبشی میشود

$$\Delta\,\left(\frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right) = -m\,g\,\Delta\,h, \tag{22}$$

یا،

$$\frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + m\,g\,h = \text{constant}. \tag{23}$$

و این نتیجه مستقل از شکل ِ سطح درست است. اندازه یِ سرعت، به فقط ارتفاع (و البته مقدارها یِ اولیه) بستگی دارد: هر چه جسم پایینتر بیاید سرعت َش بیشتر میشود.