

1 پایستگیِ تکانه، جرم متغیر

اگر برابری نیروها ی خارجی ی وارد بر یک دستگاه صفر باشد، تکانه ی کل دستگاه ثابت میماند، و سرعت مرکز-جرم ثابت میماند. از جمله سرعت مرکز-جرم اگر صفر باشد صفر میماند. به عنوان یک مثال، یک آدم به جرم m_1 در یک گاری به جرم m_2 است. اصطکاک گاری با زمین ناچیز است و آدم و گاری نسبت به زمین ساکنند. آدم در گاری حرکت میکند، چنان که نسبت به گاری به اندازه ℓ به یک جهت (این جهت را جهت محور x مینامیم) میرود. به این خاطر گاری هم نسبت به زمین جا-جا-جا میشود. را ی محاسبه ی جا-جا-جایی ی گاری نسبت به زمین، از اینجا شروع میکنم که تکانه ی کل دستگاه گاری-و-آدم اول صفر بوده، چون گاری و آدم هر-دو ساکن بوده اند، پس صفر میماند. یعنی

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0, \quad (1)$$

که v_i مؤلفه ی سرعت جسم i در جهت محور x است. از این رابطه بر زمان انتگرال میگیرم. نتیجه میشود

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 = 0. \quad (2)$$

جا-جا-جایی ی آدم نسبت به زمین برابر است با جا-جا-جایی ی آدم نسبت به گاری به اضافه ی جا-جا-جایی ی گاری نسبت به زمین:

$$\Delta x_1 = \ell + \Delta x_2. \quad (3)$$

پس،

$$m_1 (\ell + \Delta x_2) + m_2 \Delta x_2 = 0, \quad (4)$$

که نتیجه میدهد

$$\Delta x_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \ell. \quad (5)$$

علامت منفی نشان میدهد جهت جا-به-جایی ی گاری خلاف جهت جا-به-جایی ی آدم نسبت به گاری ست.

یک مثال برعکس، این است که دُ جسم به هم بخزند و به هم بچسبند. اگر سرعت جسم i پیش از برخورد v_i باشد، و جرم جسم i برابر با m_i باشد، v (سرعت مشترک جسمها پس از برخورد) چنین میشود.

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

اگر برابند نیروها ی خارجی صفر نباشد، تکانه ی کل پایسته نیست اما معادله ی تغییر آن با زمان چنین است.

$$\frac{dP}{dt} = F_e. \quad (7)$$

با استفاده از این، میشود حرکت دستگاہها یی را بررسی کرد که جرم شان ثابت نیست، یعنی ماده به آنها وارد یا از آنها خارج میشود. معادله ی نیوٹن برا ی یک ذره ی ثابت است، که جرم ثابت است. معادله ی (7) هم برا ی دستگاہ ی از ذرات است که جرم شان ثابت است، و ماده به آن وارد یا از آن خارج نمیشود. در حالت کلی معادلات ی مثل

$$[m(t)] \frac{d[v(t)]}{dt} = F, \quad (8)$$

یا

$$\frac{d\{[m(t)][v(t)]\}}{dt} = F, \quad (9)$$

درست نیستند. اما معادله ی حاکم بر یک دستگاہ با جرم متغیر را میشود از رو ی معادله ی حاکم بر یک دستگاہ به جرم ثابت به دست آورد. گیرم یک دستگاہ چنان است که پیوسته به آن ماده وارد میشود. مثلن یک گاری در حال حرکت است و به طر پیوسته تو ی ش شن میریزند، و منظور از دستگاہ در هر لحظه گاری و شنها ی درون - آن در هم ان لحظه است. جرم دستگاہ در زمان t را با $m(t)$ نشان میدهم و فرض میکنم m نسبت به t مشتقپذیر است. حالت ی را بررسی میکنم که ماده به دستگاہ وارد میشود و از آن خارج نمیشود (مثل هم ان گاری که در آن شن ریخته میشود). برا ی زمانها ی از t تا $(t + \Delta t)$ ، یک دستگاہ-پریم میگیرم که ماده ی درون آن عوض نمیشود. این دستگاہ-پریم هم ان

دستگاه در زمان $(t + \Delta t)$ است. تکانه ی این دستگاه-پریم را با P' نشان میدهم. چون ماده ی این دستگاه-پریم ثابت است، برای آن میشود معادله ی (7) را نوشت:

$$\frac{dP'}{dt} = F_e. \quad (10)$$

در زمان $(t + \Delta t)$ دستگاه-پریم هم ان دستگاه است. پس

$$P'(t + \Delta t) = P(t + \Delta t). \quad (11)$$

در زمان t ، دستگاه-پریم دُ تکه است. یک تکه دستگاه در زمان t است، و یک تکه ماده ای که در زمان t جزئی دستگاه نیست و تا زمان $(t + \Delta t)$ به دستگاه اضافه میشود. جرم این تکه از ماده (Δm) است و سرعت این تکه از ماده را با w نشان میدهم. تکانه ی دستگاه-پریم در زمان t برابر با تکانه ی دستگاه در زمان t به اضافه ی تکانه ی این تکه از ماده در زمان t است:

$$P'(t) = P(t) + (\Delta m) w. \quad (12)$$

به این ترتیب،

$$\frac{dP'}{dt} = \frac{dP}{dt} - \left[\lim_{(\Delta t) \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} \right] w, \quad (13)$$

که با فرض مشتق-پذیر بودن m میشود

$$\frac{dP'}{dt} = \frac{dP}{dt} - \frac{dm}{dt} w. \quad (14)$$

پس معادله ی (10) میشود

$$\frac{dP}{dt} = F_e + \frac{dm}{dt} w. \quad (15)$$

همچنین،

$$P(t) = [m(t)] [v(t)]. \quad (16)$$

پس،

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v}. \quad (17)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_e + \frac{dm}{dt} (\mathbf{w} - \mathbf{v}). \quad (18)$$

$(\mathbf{w} - \mathbf{v})$ سرعت تکه-ماده ی اضافه-شونده نسبت به دستگاه است. این را با \mathbf{u} نشان میدهم:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}. \quad (19)$$

به این ترتیب،

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_e + \frac{dm}{dt} \mathbf{u}. \quad (20)$$

این معادله برای حالتی که دست آمد که ماده به دستگاه وارد میشود (و در نتیجه مشتق m مثبت است). اما به سادگی میشود دید در حالت کلی هم، که ممکن است ماده به دستگاه وارد یا از دستگاه خارج شود، و مشتق m مثبت یا منفی باشد، هم این معادله به دست میآید.

مثال: سوخت با آهنگ ثابت λ از یک موشک بیرون میرود. یعنی

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda. \quad (21)$$

سرعت سوخت خارج-شونده نسبت به موشک ثابت است. اندازه ی این سرعت u و جهت آن رو به پایین است. ابتدا موشک ساکن است. با فرض این که شتاب گرانش ثابت است، معادله ی حرکت موشک (تصویر-شده در راستای قائم رو به بالا)، وقت ی موشک روی زمین ساکن است، چنین است.

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + N + \lambda u. \quad (22)$$

N نیروی عمود-بر-سطح است. چون موشک ساکن است، طرف چپ صفر است. پس

$$N = mg - \lambda u. \quad (23)$$

N نامنفی است، به شرط آن که

$$mg \geq \lambda u. \quad (24)$$

وقت ی این شرط برقرار است، موشک روی زمین میماند. اما اگر این شرط نقض شود. موشک روی زمین نمیماند. در این صورت N صفر میشود و معادله ی حرکت میشود

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + \lambda u. \quad (25)$$

زمان صفر را زمان ی میگیریم که موشک از زمین جدا میشود. جرم کل موشک (بدون و سوخت) در این زمان را با m_0 نشان میدهم. به این ترتیب،

$$m = m_0 - \lambda t. \quad (26)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\lambda u}{m_0 - \lambda t}. \quad (27)$$

از این رابطه انتگرال میگیریم:

$$v = -gt + u \ln \frac{m_0}{m_0 - \lambda t}. \quad (28)$$