

1 دستگاه ذرات

یک دسته ذره با یکدیگر و با محیط برهمکنش دارند. معادله نیوتن برای ذره j میشود

$$m_j \mathbf{a}_j = \mathbf{F}_{e,j} + \sum_k \mathbf{F}_{k \rightarrow j}. \quad (1)$$

m_j جرم ذره j است، $\mathbf{F}_{e,j}$ نیروی خارجی j وارد بر ذره j است (نیروی که از طرف بقیه ذرات دستگاه نیست)، و $\mathbf{F}_{k \rightarrow j}$ نیرویی است که ذره k به ذره j وارد میکند. به $\mathbf{F}_{k \rightarrow j}$ ها نیروها j داخلی میگویند.

روی j در رابطه (1) جمع میزنم:

$$\sum_j (m_j \mathbf{a}_j) = \sum_j \mathbf{F}_{e,j} + \sum_j \sum_k \mathbf{F}_{k \rightarrow j}. \quad (2)$$

جمله j دوم در طرف راست را میشود به شکل مجموع جملات $(\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} + \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1})$ نوشت. شکل ضعیف قانون سوم نیوتن میگوید اینها صفرند. پس،

$$\sum_j (m_j \mathbf{a}_j) = \mathbf{F}_e, \quad (3)$$

که

$$\mathbf{F}_e = \sum_j \mathbf{F}_{e,j}. \quad (4)$$

\mathbf{F}_e جمع نیروها j خارجی j وارد بر دستگاه است. طرف چپ رابطه (3) را میشود چنین نوشت.

$$\sum_j (m_j \mathbf{a}_j) = \frac{d^2}{dt^2} \left[\sum_j (m_j \mathbf{r}_j) \right]. \quad (5)$$

M و \mathbf{r}_{cm} را چنین تعریف میکنم.

$$M = \sum_j m_j. \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_j (m_j \mathbf{r}_j). \quad (7)$$

به M جرم (کل) دستگاه، و به r_{cm} مکان مرکز - جرم دستگاه میگویند. دیده میشود r_{cm} میانگین وزندار r_j ها (با وزن m_j) است. بر حسب M و r_{cm} ، معادله (3) میشود:

$$M \frac{d^2 r_{cm}}{dt^2} = F_e, \quad (8)$$

یا،

$$M a_{cm} = F_e. \quad (9)$$

این شبیه معادله نیوتن برای یک ذره است. مکان این ذره (ی مجازی) r_{cm} ، و جرم آن M است. البته ممکن است واقعاً ذره ای در r_{cm} نباشد. مثلاً اگر دستگاه شامل ذره با جرم یکسان باشد، r_{cm} وسط پاره-خطی است که مکان ذره را به هم وصل میکند، و آنجا چیزی نیست. صفت مجازی به همین خاطر است. البته رابطه (9) با معادله نیوتن برای یک ذره، یا معادلات نیوتن برای یک دستگاه از ذرات یک تفاوت مهم دارد. در معادلات نیوتن برای دستگاهی از ذرات، معادلات (1)، نیروها توابعی از x و y متغیرها بی‌ی‌اند که معادلات برای شان نوشته شده: معادلات برای مکان ذرات نوشته شده و $F_{e,j}$ تابع مکان و سرعت ذره j است و $F_{k \rightarrow j}$ تابع مکان و سرعت ذرات j و k است. (این نیروها ممکن است تابع زمان هم باشند). به این ترتیب در معادلات (1) فقط مکان ذرات و مشتقهای اول و دوم آن (و احتمالاً زمان) وارد شده. و اصولاً میشود این معادلات را (با داشتن شرط اولیه، یعنی مکان و سرعت ذرات در یک زمان) حل کرد. اما F_e در معادله (9)، در حالت کلی تابع فقط مکان مرکز - جرم و سرعت آن (و احتمالاً زمان) نیست. F_e مجموع $F_{e,j}$ ها است، که هر کدام به مکان و سرعت یک ذره بستگی دارند. پس در حالت کلی، در معادله (9) مکان و سرعت همه ذرات ظاهر میشود و از این معادله به تنهایی نمیشود r_{cm} را حساب کرد.

دیده میشود در حرکت مرکز - جرم، نیروهای داخلی مستقیم وارد نمیشوند. البته باید توجه کرد که نیروهای داخلی بر حرکت ذرات دستگاه اثر دارند. نیروهای خارجی هم تابع مکان و سرعت ذرات دستگاهند. پس نیروهای داخلی ممکن است به طر غیر - مستقیم بر حرکت مرکز - جرم اثر داشته باشند.

در حالتی که نیروی خارجی معلوم باشد، حرکت مرکز - جرم مثل حرکت یک ذره با آن نیرو

است. مثلاً برای یک دستگاه ذرات که کوچک باشد (چنان که شتاب گرانیش برای همه ی ذرات آن یکسان باشد)، نیروی گرانیشی برابر با جرم دستگاه ضرب در شتاب گرانیش است. اگر از خارج نیرویی جز گرانیش بر دستگاه اثر نکند، شتاب مرکز -جرم هم آن شتاب گرانیش میشود. هر یک از ذرات این دستگاه ممکن است به شکل ی پیچیده حرکت کنند، اما مرکز -جرم با شتاب گرانیش حرکت میکند، و البته ممکن است در مکان مرکز -جرم واقع ذره ای نباشد.

یک حالت - خاص مهم این است که نیروها ی خارجی صفر باشند. در این حالت (9) میشود

$$M a_{cm} = 0. \quad (10)$$

میگویند این دستگاه خُذگردان است، یعنی چیزی از بیرون دستگاه بر آن اثر نمیکند. دیده میشود برای یک دستگاه خُذگردان شتاب مرکز -جرم صفر است. یعنی مرکز -جرم یک دستگاه خُذگردان با سرعت ثابت حرکت میکند.

رابطه ی (10) برای یک دستگاه خُذگردان را میشود چنین نوشت.

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j (m_j \mathbf{v}_j) \right] = 0. \quad (11)$$

این یعنی

$$\sum_j (m_j \mathbf{v}_j) = \text{constant}. \quad (12)$$

تکانه ی (خطی ی) ذره ی j را با \mathbf{p}_j نشان میدهم و آن را حاصل - ضرب جرم ذره ی j در سرعت ذره ی j تعریف میکنم:

$$\mathbf{p}_j = m_j \mathbf{v}_j. \quad (13)$$

تکانه ی کل دستگاه را هم با \mathbf{P} نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{P} = \sum_j \mathbf{p}_j. \quad (14)$$

دیده میشود

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{cm}. \quad (15)$$

اگر نیروی خارجی وارد بر دستگاه صفر باشد، تکانه‌ی دستگاه ثابت میماند. به این پایداری تکانه میگویند.

یک مثال ساده از پایداری تکانه پس-زنی است. یک سیستم شامل دو جرم ساکن است که به نیروی خارجی وارد بر آنها ناچیز است. اگر جسم اول حرکت کند، جسم دوم هم حرکت میکند، چنان که

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0. \quad (16)$$

یعنی سرعتها بر خلاف جهت هم‌اند و نسبت اندازه‌هایشان عکس‌نسبت جرمهاست. مثلاً اگر یک گلوله‌ی چند-گرمی از یک تفنگ چند کیلوگرمی شلیک شود، سرعت تفنگ بلافاصله پس از شلیک گلوله حدود یک هزارم سرعت گلوله میشود. سرعت گلوله چند-صد متر بر ثانیه است. پس سرعت تفنگ چند ده‌متر بر ثانیه میشود.