

1 حل مسئله با قانونهای نیوتن، III

یک جسم روی یک سطح شیبدار با زاویه θ است و در زمان صفر با سرعت v_0 به سوی پایین سطح شیبدار حرکت میکند. جهت موازی با سطح شیبدار به سوی پایین را با x نشان میدهم. سرعت و شتاب جسم در این جهت را با a و v نشان میدهم. نیروها بی که به این جسم وارد میشوند وزن، N (نیروی عمود-بر-سطح)، و f (اصطکاک) اند. معادله نیوتن در راستای عمود بر سطح، همراه با این شتاب جسم در این راستا صفر است، نتیجه میدهد

$$N = m g \cos \theta, \quad (1)$$

که m جرم جسم است. چون جسم نسبت به سطح حرکت میکند، اصطکاک جنبشی است، و جهت آن برخلاف جهت سرعت سطح است. به این ترتیب، معادله نیوتن در جهت x میشود

$$\begin{aligned} m a &= m g \sin \theta - \mu_k N, \\ &= m g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta), \end{aligned} \quad (2)$$

که μ_k ضریب اصطکاک جنبشی است. پس

$$a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta). \quad (3)$$

این شتاب ثابت است. پس سرعت میشود

$$v = v_0 + g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta) t. \quad (4)$$

اگر پیرانتز ضریب g مثبت باشد، با گذشت زمان سرعت جسم زیاد میشود و جسم هیچ وقت نمیایستد. اگر این پیرانتز منفی باشد:

$$\mu_k > \tan \theta, \quad (5)$$

جسم در زمان t_1 سرعتش صفر میشود:

$$t_1 = \frac{v_0}{g (\mu_k \cos \theta - \sin \theta)}. \quad (6)$$

آیا جسم ساکن میماند؟ اگر جسم ساکن بماند، اصطکاک ایستایی میشود. در این صورت معادله ی نیوتن در جهت محور x میشود

$$m a = f_s + m g \sin \theta. \quad (7)$$

وقت ی جسم ساکن بماند، شتاب آن صفر است. پس

$$f_s = -m g \sin \theta. \quad (8)$$

این که f_s منفی است، یعنی اصطکاک در خلاف جهت محور x است، یعنی به سوی بالا ی سطح - شیبدار است. جسم میتواند ساکن بماند، به شرطی که اصطکاک لازم بیش از بیشینه ی اصطکاک ایستایی نباشد. یعنی به شرط آن که

$$|f_s| \leq \mu_s N, \quad (9)$$

که μ_s ضریب اصطکاک ایستایی است. شرط بالا یعنی

$$m g \sin \theta \leq \mu_s m g \cos \theta, \quad (10)$$

یا،

$$\mu_s \geq \tan \theta. \quad (11)$$

اما اگر μ_s نا کوچکتر از μ_k باشد (که معمولن هست)، شرط (5) شرط (11) را نتیجه میدهد. پس اگر (5) برقرار باشد، جسم سرانجام سرعتش صفر میشود و از آن پس ساکن میماند. در این صورت، جسم از زمان صفر تا ساکن - شدن چه مسافتی را میپیماید؟

اگر جسم ابتدا در حال حرکت به سوی بالا باشد، اصطکاک جنبشی به سوی پایین خواهد بود. معادلات میشوند

$$a = g (\sin \theta + \mu_k \cos \theta). \quad (12)$$

$$v = -v_0 + g (\sin \theta + \mu_k \cos \theta) t. \quad (13)$$

در این حالت حتمً زمان ی میرسد که سرعت صفر شود. این زمان را با t_2 نشان میدهم:

$$t_2 = \frac{v_0}{g(\mu_k \cos \theta + \sin \theta)}. \quad (14)$$

از این به بعد، اگر (11) برقرار باشد جسم ساکن میماند. اگر جسم به پایین حرکت میکند و شتاب a_s از (3) به دست میآید.

یک ماشین روی پیچ یک جاده حرکت میکند. پیچ بخشی از یک دایره به شعاع R است. ضریب اصطکاک ایستایی چرخهای ماشین با جاده μ_s است. (وقت چرخهای روی جاده نمیغزند، اصطکاک چرخها با جاده ایستایی است.) پیچ شیبدار است: زاویه ی جاده با سطح افقی θ است و آن لبه ی جاده که از مرکز پیچ دورتر است بالاتر است. سرعت ماشین چنان است که ماشین در جاده بالا یا پایین (به بیرون پیچ یا به درون پیچ) نمیرود. میخاهم گستره ی این سرعت را حساب کنم. به ماشین سه نیرو وارد میشود: وزن، N (نیروی عمود بر سطح)، و f_s (اصطکاک ایستایی). جرم ماشین را با m نشان میدهم. شتاب ماشین در راستای شعاعی (v^2/R) و به سمت درون پیچ است. اصطکاک با جاده مماس است و ممکن است به سوی درون پیچ (به پایین) یا بیرون پیچ (به بالا) باشد. جهت قراردادی برای آن را به بیرون (بالا) میگیریم. اگر نتیجه منفی شد، یعنی جهت بر عکس بوده. (لازم نیست محاسبه تکرار شود.) مثلثها ی معادله ی نیوتن در جهت شعاعی و در جهت قائم رو به بالا، به ترتیب، میشوند

$$m \left(-\frac{v^2}{R} \right) = -N \sin \theta + f_s \cos \theta. \quad (15)$$

$$m a_z = -m g + N \cos \theta + f_s \sin \theta. \quad (16)$$

a_z مثلثه ی شتاب در جهت قائم رو-به-بالا است، که چون قرار است ماشین بالا-و-پایین نرود صفر است. به این ترتیب،

$$N = m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{R} \sin \theta \right). \quad (17)$$

$$f_s = m \left(g \sin \theta - \frac{v^2}{R} \cos \theta \right). \quad (18)$$

اصطکاک ایستایی نباید از بیشینه ی اصطکاک ایستایی بیشتر شود:

$$|f_s| \leq \mu_s N, \quad (19)$$

که یعنی

$$f_s \leq \mu_s N. \quad (20)$$

$$-f_s \leq \mu_s N. \quad (21)$$

برای خلاصه-نویسی، w را چنین تعریف میکنم.

$$w = \frac{v^2}{g R}. \quad (22)$$

شرطها میشوند

$$(\sin \theta - w \cos \theta) \leq \mu_s (\cos \theta + w \sin \theta). \quad (23)$$

$$-(\sin \theta - w \cos \theta) \leq \mu_s (\cos \theta + w \sin \theta). \quad (24)$$

یا،

$$(\cos \theta + \mu_s \sin \theta) w \geq (\sin \theta - \mu_s \cos \theta). \quad (25)$$

$$(\cos \theta - \mu_s \sin \theta) w \leq (\sin \theta + \mu_s \cos \theta). \quad (26)$$

شرط (25) میشود

$$w \geq \frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}. \quad (27)$$

شرط (26) اگر ضریب w در طرف چپ نامثبت باشد حتمن برقرار است. اگر ن میشود

$$w \leq \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}. \quad (28)$$

این که ضریب w در طرف چپ (26) نامثبت باشد، یعنی

$$\mu_s \geq \cot \theta. \quad (29)$$

خلاصه آشن این است که (27) حتمن باید برقرار باشد. اگر (29) برقرار باشد شرط دیگری لازم نیست. اگر ن (28) هم باید برقرار باشد. اگر μ_s صفر باشد، فقط یک مقدار برای سرعت مجاز است، هم آن که در یکی از مثالهای پیش به دست آمد. اگر ن یک گستره برای سرعت به دست میآید، و هر چه μ_s بزرگتر باشد این گستره بزرگتر میشود.