

1 حل مسئله با قانونهای نیوٲن، II

مرکز یک قرقره ی سبک ثابت است (از سقف آویزان است). از روی قرقره یک نخ سبک گذشته و به هر یک از دو طرف این نخ یک جسم بسته شده. جرم یک جسم m_1 و جرم جسم دیگر m_2 است. میخاهم شتاب هر جرم را بیابیم. به هر جرم د نیرو وارد میشود: وزن آن جرم و کشش نخ. قبلن معلوم شد اگر یک تکه نخ سبک به جایی (جز بقیه ی نخ) وصل نباشد، کشش نخ در طول آن ثابت است. با استدلال ی مشابه (این که برابند نیروها ی وارد بر یک جسم سبک باید صفر باشد) معلوم میشود اگر نخ با یک سطح تماس داشته باشد ولی سطح به آن نیرویی در راستای نخ وارد نکند هم همچنان اندازه ی کشش در طول نخ ثابت میماند. وقت ی نخ با یک قرقره ی سبک در تماس است، قرقره به نخ نیرویی در راستای نخ وارد نمیکند. (این را میشود با بررسی ی حرکت دورانی ی نخ نشان داد. فعلن آن را ثابت نمیکنم. فقط از آن استفاده میکنم.) پس اندازه ی کشش در طول نخ ثابت است. این اندازه را با T نشان میدهم. محور z را عمودی و رو-به-بالا میگیرم و معادله ی نیوٲن در جهت z را برای د جسم مینویسم:

$$m_1 a_1 = -m_1 g + T. \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g + T. \quad (2)$$

د معادله برای سه مجهول a_1 و a_2 و T داریم. به جایی نیروی قیدی ی T ، که نامعین است، یک قید لازم است. این قید آن است که طول نخ ثابت است. مختصه ی z برای مرکز قرقره را با z_0 نشان میدهم. (مقدار این مختصه مهم نیست. فقط ثابت بودن آن مهم است. میشود z_0 را صفر هم گرفت.) طول بخش ی از نخ که بین قرقره و جسم i است، $(z_0 - z_i)$ است. به این ترتیب،

$$(z_0 - z_1) + (z_0 - z_2) = \ell, \quad (3)$$

که ℓ ثابت است. از رابطه ی بالا د بار مشتق میگیرم:

$$-a_1 - a_2 = 0. \quad (4)$$

حالا سه معادله برای سه مجهول داریم. دیده میشود

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g. \quad (5)$$

$$a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (6)$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (7)$$

از جمله معلوم میشود جسمی که جرمش کمتر است شتابش مثبت است (رو به بالا است).
 یک نخ سبک از روی یک قرقره ثابت سبک گذشته است. یک سر نخ به یک آدم به جرم m وصل است. سر دیگر نخ به یک وزنه به جرم M وصل است. آن آدم جایی از نخ (نقطه B) بین قرقره و وزنه را با نیروی F به پایین میکشد. میخواهم a (شتاب رو-به-بالای آدم) را حساب کنم. کشش دیگر در سراسر نخ ثابت نیست، چون آدم در نقطه B به نخ نیرویی در راستای نخ وارد میکند. کشش بین B و وزنه را با T_1 و در بقیه نخ را با T_2 نشان میدهم. معادله نیوتن را برای آدم، وزنه، و یک تکه از نخ اطراف نقطه B مینویسم:

$$m a = -m g + T_2 + F. \quad (8)$$

$$M A = -M g + T_1. \quad (9)$$

$$0 = T_2 - T_1 - F. \quad (10)$$

F در رابطه F اول عکس العمل نیرویی است که آدم به نقطه B وارد میکند. این عکس العمل از نقطه F به آدم وارد میشود. شتاب وزنه را با A نشان داده ام. و طرف چپ رابطه F سوم صفر است، چون از جرم نخ (و از جمله بخش F از آن) چشم پوشیده ام. اینها سه معادله با چهار مجهولند. اما یک قید هم هست، که طول نخ ثابت است. با استدلالی مشابه با مثال پیش،

$$A + a = 0. \quad (11)$$

به این ترتیب،

$$a = \frac{(M - m) g + 2 F}{m + M}. \quad (12)$$

حتا اگر وزنه سبکتر از آدم باشد، آدم میتواند خُذش را بالا بکشد. باید F آن قدر بزرگ باشد که صورت مثبت شود.

محور z را عمودی و رو-به-بالا میگیریم. یک سطح شامل سه مستطیل است. یک مستطیل افقی، بین x_1 و x_2 (با $x_1 < x_2$)، یک مستطیل که از x_1 به پایین و چپ میرود و زاویه ی شیبش θ_1 است، و یک مستطیل که از x_2 به پایین و راست میرود و زاویه ی شیبش θ_2 است. به دُ-طرف سطح افقی دُقرقه ی سبک وصل شده. یک نخ سبک از روی این دُ-قرقه گذشته، و سر چپش به جسم ی به جرم m_1 و سر راستش به جسم ی به جرم m_2 وصل شده. هر یک از این جرمها روی یک ی از مستطیلهای چپ و راست نند. نخ و جرمها در یک صفحه ی xy -ثابت نند. از اصطکاک بین هر جرم و سطح زیرش چشم میپوشم. میخاهم شتاب هر یک از جسمها را بیابم. شتاب جسم ی که جرمش m_1 است در راستای موازی با مستطیل چپ و به سوی چپ را با a_1 ، و شتاب جسم ی که جرمش m_2 است در راستای موازی با مستطیل راست و به سوی راست را با a_2 نشان میدهم. معادله ی نیوتن را برای این جسمها در هم ین جهتها مینویسم. به هر جسم علاوه بر وزنش یک کشش نخ، و یک نیروی عمود بر سطح وارد میشود. مقدار این نیرو برای جسم i را با N_i ، و کشش نخ را با T نشان میدهم.

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin \theta_1 - T. \quad (13)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin \theta_2 - T. \quad (14)$$

باز هم دُ معادله برای سه مجهول. و باز یک قید هست که طول نخ ثابت است. فاصله ی جسم i از قرقه ی نزدیک به آن را با s_i نشان میدهم. ثابت بودن طول نخ نتیجه میدهد $(s_1 + s_2)$ ثابت است، و با دُ بار مشتقگیری از این معلوم میشود

$$a_1 + a_2 = 0. \quad (15)$$

به این ترتیب،

$$a_1 = \frac{m_1 \sin \theta_1 - m_2 \sin \theta_2}{m_1 + m_2} g. \quad (16)$$

$$a_2 = \frac{m_2 \sin \theta_2 - m_1 \sin \theta_1}{m_1 + m_2} g. \quad (17)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)}{m_1 + m_2} g. \quad (18)$$

N_i ها در معادلات ظاهر نشدند، و البته به دست هم نیامدند، چون در جهتها بی که معادلات نیوتن نوشته شدند متلفه نداشتند. اگر معادلات نیوتن در جهتها ی عمود بر مستطیلهای چپ راست نوشته میشدند و از این استفاده میشد که شتاب هر جسم در راستای عمود بر سطح زیرینش صفر است، نتیجه میشد

$$N_i = m_i g \cos \theta_i. \quad (19)$$

یک ماشین روی پیچ یک جاده حرکت میکند. پیچ بخشی از یک دایره به شعاع R است. از اصطکاک ماشین با جاده چشم میپوشم. پیچ شیبدار است: زاویه ی جاده با سطح افقی θ است و آن لبه ی جاده که از مرکز پیچ دورتر است بالاتر است. سرعت ماشین چنان است که ماشین در جاده بالا یا پایین (به بیرون پیچ یا به درون پیچ) نمیروند. میخاهم این سرعت را حساب کنم. به ماشین دنیرو وارد میشود: وزن N (نیروی عمود بر سطح). جرم ماشین را با m نشان میدهم. شتاب ماشین در راستای شعاعی (v^2/R) و به سمت درون پیچ است. متلفهای معادله ی نیوتن در جهت شعاعی و در جهت قائم رو به بالا، به ترتیب، میشوند

$$m \left(-\frac{v^2}{R} \right) = -N \sin \theta. \quad (20)$$

$$m a_z = -m g + N \cos \theta. \quad (21)$$

a_z متلفه ی شتاب در جهت قائم رو-به-بالا است، که چون قرار است ماشین بالا-و-پایین نرود صفر است. پس،

$$N = \frac{m g}{\cos \theta}. \quad (22)$$

$$v = \sqrt{g R \tan \theta}. \quad (23)$$