1 حرکت ِ بیش-از-یک-بُعدی

تعداد ِ پارامترها یی که جا یِ متحرک را مشخص میکنند بُعد ِ حرکت است. مثلَن برا یِ متحرک ی که در یک صفحه حرکت میکند، جا با دُ مختصه مشخص میشود. پس این حرکت دُ-بُعدی ست.

برا یِ حرکت ِ بیش-از-یک-بُعدی، میشود بستگی یِ هر مختصه به زمان را جداگانه در نظر گرفت. رابطه یِ r_i (مختصه یِ i اُم) با زمان مثل ِ رابطه یِ مکان ِ یک ذره یِ یک-بُعدی با زمان است.

میشود هم مختصات را با هم در نظر گرفت و جا یِ ذره را با $\boldsymbol{r}$ (بردار ِ مکان) مشخص کرد. البته دانستن ِ بردار ِ $\boldsymbol{r}$ هم-ارز با دانستن ِ مختصات ِ r_i است. نمادگذاری یِ برداری نوشتن را مختصرتر میکند. سرعت و شتاب را با، به ترتیب، $\boldsymbol{v}$ و $\boldsymbol{a}$ نشان میدهم. $\dot{A}$ هم مشتق ِ A نسبت به زمان است. روابط ِ بین ِ مئلفِها یِ دِکَرتی یِ مکان و سرعت و شتاب، مثل ِ حرکت ِ یک-بُعدی یَند:

$$v_i = \dot{r}_i. \tag{1}$$

$$a_i = \dot{v}_i. \tag{2}$$

$$a_i = \ddot{r}_i. \tag{3}$$

و البته روابط ِ برعکس میشوند

$$r_i(t) = r_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,t'\, v(t'). \tag{4}$$

$$v_i(t) = v_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,t'\, a(t'). \tag{5}$$

برا یِ حرکت ِ n-بُعدی، هر یک از اینها n رابطه است. در نمادگذاری یِ برداری، هر دسته از این روابط به شکل ِ یک رابطه یِ برداری در میئاید:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}. \tag{6}$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}. \tag{7}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{8}$$

و روابطِ برعکس میشوند

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,t'\,\boldsymbol{v}(t'). \tag{9}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,t'\,\boldsymbol{a}t'). \tag{10}$$

تئکید میکنم که روابطِ بینِ مثلفِها فقط وقت ی درست َند که مختصاتِ دِکَرتی به کار برود. علت این است که در مختصاتِ دِکَرتی بردارها یِ پایه ثابت َند. پس مشتقِ آنها صفر است. گیرم $\boldsymbol{B}$ مشتقِ $\boldsymbol{A}$ است:

$$\boldsymbol{B} = \dot{\boldsymbol{A}}. \tag{11}$$

بردارها را بر حسبِ $\boldsymbol{e}_i$ ها (بردارها یِ پایه) بسط میدهم.

$$\boldsymbol{A} = \sum_i A_i\,\boldsymbol{e}_i. \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B} = \sum_i B_i\,\boldsymbol{e}_i. \tag{13}$$

از $\boldsymbol{A}$ مشتق میگیرم (و قضیه یِ مشتقِ حاصل-ِ-ضرب را به کار میبرم):

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \sum_i \dot{A}_i\,\boldsymbol{e}_i + \sum_i A_i\,\dot{\boldsymbol{e}}_i. \tag{14}$$

در حالتِ کلی که بردارها یِ پایه ثبات نباشند، مشتقِ آنها را باید بر حسبِ خُدِ بردارها یِ پایه نوشت. اما برا یِ مختصاتِ دِکَرتی بردها یِ پایه ثابت َند. پس جمله یِ دوم صفر میشود:

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \sum_i \dot{A}_i\,\boldsymbol{e}_i. \tag{15}$$

این باید با $\boldsymbol{B}$ برابر باشد. پس

$$B_i = \dot{A}_i. \tag{16}$$

رابطه یِ برعکس این است که $\boldsymbol{A}$ انتگرالِ $\boldsymbol{B}$ است:

$$\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,t'\,\boldsymbol{B}(t'). \tag{17}$$

$\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ را بر حسب ِ $\boldsymbol{e}_i$ ها بسط میدهم. اگر $\boldsymbol{e}_i$ ها ثابت باشند، میشود آنها را از انتگرال بیرون آورد. در این حالت،

$$\sum_i [A_i(t)]\,\boldsymbol{e}_i = \sum_i [A_i(t_0)]\,\boldsymbol{e}_i + \sum_i \left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,t'\,B_i(t')\right]\,\boldsymbol{e}_i. \tag{18}$$

و این هم نتیجه میدهد

$$A_i(t) = A_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,t'\,B_i(t'). \tag{19}$$