زاویه یِ z را با $\arg(z)$، مزدوجِ مختلطِ z را با $\bar{z}$، قدرمطلقِ z را با $|z|$، و بخشها یِ حقیقی و مُهومی یِ z را با به ترتیب $\mathrm{Re}(z)$ و $\mathrm{Im}(z)$ نشان میدهیم.

---

1 تابعها یی یک متغیره (متغیر را با x نشان میدهم) را در نظر بگیرید که در $x=0$ و $x=a$ صفر میشوند. ضربِ داخلی را چنین تعریف میکنیم.

$$\langle f, g\rangle := \int_0^a \mathrm{d}x\, \overline{f(x)}\, g(x).$$

با اینها عملگرِ $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ چه‌گونه است؟

a اِرمیتی **b** پادارمیتی **c** یکانی **d** هیچ کدام

---

2 در مسئله یِ پیش، اگر تابعها در $x=0$ صفر شوند، ولی مشتقِ شان در $x=a$ صفر شود، عملگرِ $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ چه‌گونه است؟

a اِرمیتی **b** پادارمیتی **c** یکانی **d** هیچ کدام

---

3 جوابِ مسئله یِ **1** برا یِ عملگرِ $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2$ کدام است؟

a اِرمیتی **b** پادارمیتی **c** یکانی **d** هیچ کدام

---

4 جوابِ مسئله یِ **2** برا یِ عملگرِ $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^2$ کدام است؟

a اِرمیتی **b** پادارمیتی **c** یکانی **d** هیچ کدام

---

5 چندجمله‌ای یِ لُژاندر از درجه یِ 4 را با P_4 نشان میدهم. داریم

$$\mathrm{P}_4(x) = a + b\,x^2 + c\,x^4, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_4}{\mathrm{d}x}\right] + 20\,\mathrm{P}_4(x) = 0,$$

که a و b و c ثابت اند. (b/a) کدام است؟

a 1 **b** (-2) **c** 5 **d** (-10)

---

6 در مسئله یِ پیش، (c/b) کدام است؟

a 1 **b** $(-7/6)$ **c** $(13/5)$ **d** (-5)

---

7 با فرضِ $\mathrm{P}_4(1) = 1$ مشتقِ P_4 در نقطه یِ $x = 1$ کدام است؟

a 0 **b** 1 **c** 4 **d** 10

---

8 تابعِ f و تبدیلِ لَپلَسِ آن (F) را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x > a \end{cases}, \qquad F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\;\exp(-s\,x)\,f(x),$$

که a یک عددِ حقیقی یِ ثابت است. $F(s)$ کدام است؟

a $\frac{1}{s}$ **b** $\frac{1}{s-a}$ **c** $\frac{1}{s} - \frac{1}{a}$ **d** $\frac{\exp(-s\,a)}{s}$

---

9 در مسئله یِ پیش، ناحیه ای که انتگرالِ تعریف-کننده یِ تبدیلِ لَپلَس وجود دارد کدام است؟

a $\mathrm{Re}(s) > 0$ **b** $\mathrm{Re}(s) < 0$

c $\mathrm{Im}(s) > 0$ **d** $\mathrm{Im}(s) < 0$

---

10 تابع ِ f و تبدیل ِ فوریه ی ِآن (F) را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\exp(-\alpha\,|x|),\qquad F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \exp(-\mathrm{i}\,k\,x)\,f(x),$$

که α یک عدد ِ حقیقی ی ِمثبت است. $F(k)$ کدام است؟

a $\dfrac{1}{-\mathrm{i}\,k+\alpha}$ b $\dfrac{1}{\mathrm{i}\,k+\alpha}$ c $\dfrac{2\,k}{k^2+\alpha^2}$ d $\dfrac{2\,\alpha}{k^2+\alpha^2}$

---

11 تابع ِ ψ از دُ متغیر ِ (ρ,ϕ) را در نظر بگیرید. (ρ,ϕ) مختصات ِ قطبی اند. این تابع در $(0<\rho<a, 0<\phi<\alpha)$ معادله ی ِلَپلَس را بر میآورَد (و در $\rho=0$ هم خُشرفتار است). ویژه‌بردارها و ویژه‌مقدارها ی ِ$(\partial^2/\partial\phi^2)$ با این شرط که این تابعها در $\phi=0$ صفر شوند و مشتق ِشان نسبت به ϕ در $\phi=\alpha$ صفر شود را در نظر بگیرید. این ویژه‌بردارها را Φ_m ، و ویژه‌مقدارها ی ِ متناظر را λ_m مینامیم. Φ_m ها و λ_m ها را حساب کنید.

---

12 در مسئله ی ِپیش، f را بر حسب ِ Φ_m ها بسط بدهید:

$$f(\rho,\phi)=\sum_m R_m(\rho)\,\Phi_m(\phi).$$

R_m ها را (تا حد ِ یک ثابت ِ ضربی ی ِنامعین) حساب کنید.

---

13 موفق باشید.

امتحانِ پایانی یِ ریاضیاتِ مهندسی **1393/04/04**

این امتحان شاملِ 10سئالِ چهارگزینه‌ای و 2 مسئله است. در سئالها یِ چهارگزینه‌ای، میتوانید بیش از یک گزینه را هم انتخاب کنید. البته هر سئال یک و فقط یک گزینه یِ درست دارد. هر پاسخِ درست 3+ نمره، هر پاسخِ نادرست 1− نمره، و هر گزینه یِ سفید-گذاشته-شده 0 نمره دارد. مسئله‌ها یِ 11 و 12 هر کدام 10 نمره دارند. جوابِ نهایی یِ مسئله‌ها را حتمَن در مستطیلها بنویسید، و فقط پاسخنامه را تحویل بدهید.

نام: محمد

نامِ خانواده‌گی: خرمی

شماره یِ دانشجویی: 0

d	**c**	**b**	**a**	
		■		**1**
■				**2**
			■	**3**
			■	**4**
■				**5**
		■		**6**
■				**7**
■				**8**
			■	**9**
■				**10**

11

$$\Phi_m(\phi) = \sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\,\frac{\pi\,\phi}{\alpha}\right], \qquad m = 0, 1, \ldots$$

$$\lambda_m = -\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\,\frac{\pi}{\alpha}\right]^2$$

12

$$R_m(\rho) = \rho^{\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\,\frac{\pi}{\alpha}\right]}$$